Feuille d'exercices de OM2 : Les développements limités

I Tests de compréhension

Les tests sont à faire pour vérifier que vous comprenez le cours, les réponses se trouvent en fin de feuille de TD.

Troncature

Test 1. Le formulaire donne la formule suivante :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + x^9\varepsilon(x), \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

(a) En déduire un développement limité à l'ordre 5 de $\sin(x)$ quand $x \to 0$, et donner sa partie régulière.

(b) Même question à l'ordre 4.

Test 2. Donner le développement limité d'ordre 2 en 0 du polynôme $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3$.

Substitution

Test 3. Donner le développement limité en 0 des fonctions suivantes

(a) $-\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$, à l'ordre 3 (b) $2\cos(x)$ et $\cos(2x)$, à l'ordre 3

Test 4. Donner le développement limité en 0 de

(a) $\sqrt[3]{1+3x}$ à l'ordre 2 (b) $\sqrt[4]{1+x^2}$ à l'ordre 4

Test 5. Soit $f(x) = 1 + x - x^2 + x^2\varepsilon(x)$. Déterminer le développement limité à l'ordre maximum possible en 0 de $f(x^3)$.

Test 6. A l'aide de développements limités, déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$

II Exercices

Sommes et produits de développements limités

Exercice 1. Calculez le développement limité quand $x \to 0$ des fonctions suivantes :

(a) $\sin(2x) - 2\cos(x)$, à l'ordre 4 (b) $(x+x^2)^2 + \cos(x)$, à l'ordre 3

(c) $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$, à l'ordre 2

Exercice 2. Calculez le développement limité à l'ordre 3 quand $x \to 0$ des fonctions suivantes :

(a) $(1+x^2)^2\cos x$ (b) $e^x\sin(x)$ (c) $\cos^2 x$ (d) $e^{2x}\ln(1+x)$

Exercice 3 (Pour aller plus loin)**.** Calculer le développement limité en 0 de $f(x)\cdot g(x)$ à l'ordre maximum possible, sachant que : $f(x) = x - x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$, $\lim_{x\to 0}\ \varepsilon_1(x) = 0$, et $g(x) = 2x + x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$, $\lim_{x\to 0}\ \varepsilon_2(x) = 0$.

Réponse. En suivant la méthode générale (troncature à l'ordre 2 du produit), on trouve $f(x)g(x) = (x - x^2)(2x + x^2) + x^2\varepsilon(x) = 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$. Mais on peut faire mieux : $f(x) = x(1 - x + x\varepsilon_1(x))$, $g(x) = x(2 + x + x\varepsilon_2(x)$ donc $f(x)g(x) = x^2[(1-x)(2+x) + x\varepsilon_3(x)] = x^2(2 - x + x\varepsilon(x)) = 2x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x)$.

Se ramener à des développements limités connus

Exercice 4 (Attention au piège)**.** On veut calculer le développement limité de e^{1+x} à l'ordre 2 quand $x \to 0$.

(a) Que va-t-on obtenir si on fait la substitution $u = 1 + x$ dans le développement limité de e^u en 0 ?

(b) En utilisant que $e^{a+b} = e^a e^b$, déterminer le développement limité de e^{1+x} à l'ordre 2 quand $x \to 0$.

Exercice 5 (Exercice important)**.** Calculer les développements limités suivants à l'ordre 2 quand $x \to 0$ en se ramenant à des DL connus :

(a) $\dfrac{1}{4+3x}$	(b) $\dfrac{3}{x-2}$	(c) $\sqrt{2+x}$
(d) $\sqrt[3]{2+3x}$	(e) $\ln(5+3x)$	(f) e^{3+2x}

Composition de développements limités

Exercice 6. Calculez le developpement limité à l'ordre 3 quand $x \to 0$ des fonctions suivantes :

(a) $\sin(\ln(1+x))$ (b) $\ln(1+\sin(2x))$

Exercice 7. Calculez le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x) = \ln(\cos(x))$.

Exercice 8 (Attention au piège)**.** Calculez le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$f(x) = e^{\cos(x)}$$

Exercice 9. Calculez le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

(a) $\sqrt{e^x + \cos(x)}$ (b) $\ln\left(\dfrac{e^x}{2} + \sin x\right)$

Quotient de DL

Exercice 10. Déterminer le développement limité de $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$ en calculant le développement limité de $\dfrac{1}{x+2}$ et en multipliant par $x+3$.

Exercice 11. Calculez le développement limité à l'ordre 2 quand $x \to 0$ des fonctions suivantes :

(a) $\dfrac{e^x}{\cos(x)}$ (b) $\dfrac{1}{1-\sin(x)}$ (c) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+2x}}$

Exercice 12 (attention !)**.** Calculez le développement limité à l'ordre 2 quand $x \to 0$ de

$$f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\sin(2x)}.$$

Formules de Taylor-Young (complément)

Exercice 13. (a) Utiliser la formule de Taylor-Young pour écrire le développement limité à l'ordre 4 quand $x \to 0$ de $(1+x)^\alpha$.

(b) En déduire le développement limité à l'ordre 3 quand $x \to 0$ de $\sqrt{1+x}$.

Exercice 14. Utiliser la formule de Taylor-Young en $\frac{\pi}{4}$ pour écrire le développement limité à l'ordre 2 quand $x \to \frac{\pi}{4}$ de $\sin(x)$.

Primitive d'un développement limité (complément)

Exercice 15.

(a) Déterminer le développement limité à l'ordre 6 quand $x \to 0$ de la fonction $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(b) En se rappelant que la dérivée de $\arctan(x)$ est $\dfrac{1}{1+x^2}$, déduire un développement limité à l'ordre 7 quand $x \to 0$ de $\arctan(x)$

Limites en 0

Exercice 16. À l'aide de développements limités, déterminer les limites suivantes :

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x+x^2} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2+x^3}$$

Exercice 17. Utiliser les développements limités pour calculer les limites suivantes :

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{1-\sqrt{1-3x}} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\tan(x)}{x^2+x^3} \qquad \text{(c)} \lim_{x\to 0+} \frac{e^x-\cos(x)}{\sin(x)-\ln(1+x)}$$

Exercice 18 (Pour aller plus loin)**.**

(a) Calculez le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $\frac{1}{x}\ln(1+x)$.

(b) En déduire $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

(c) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Droite tangente, position de la courbe relativement à la tangente, extremum

Exercice 19. Pour chacune des fonctions suivantes dont on donne le développement limité , déterminer une équation de sa droite tangente en 0 et la position relative de la courbe et de sa droite tangente au voisinage de 0. Dire s'il s'agit d'un extremum local.

$$f_1(x) = \sin(2x) - 2\cos(x) = -2 + 2x + x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad f_2(x) = \ln(1+x) + e^x = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$f_3(x) = \sqrt{\cos(x)} = 1 - \frac{1}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

Asymptotes en ∞

Exercice 20. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^3+x^2+x}{x^2-x+1}$$

— Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de $hf(\frac{1}{h})$ lorsque $h \to 0$, $h > 0$.
— En posant $h = \frac{1}{x}$, en déduire l'equation de la droite asymptote au graphe de f en $+\infty$.
— Quelle est la position du graphe de f par rapport à l'asymptote ?

Exercice 21. Soit $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$. En étudiant $hf(\frac{1}{h})$ lorsque $h \to 0$, trouver l'équation de la droite asymptote au graphe de f au voisinage de $+\infty$, et déterminer la position du graphe de f par rapport a l'asymptote.

Exercice 22. Soit $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+1}$

(a) Déterminer le développement limité en à l'ordre 2 quand $h \to 0$ de $hf(\frac{1}{h})$.

(b) En déduire l'équation de l'asymptote oblique de f en $+\infty$.

(c) Déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à cette asymptote.

(d) Même questions en $-\infty$.

III Exercices supplémentaires

Vous trouverez les réponses à ces exercices en fin de feuille de TD.

Sommes, produits, quotients, compositions

Exercice 23. Calculez le développement limité en 0 des fonctions suivantes :

(a) $\ln(1+x) + e^x$, à l'ordre 3 (b) $e^x + e^{-x}$, à l'ordre 3

(c) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, à l'ordre 3

Exercice 24. Calculer le développement limité de $f(x)+g(x)$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0, sachant que : $f(x) = 2+x-x^2+2x^3+x^3\varepsilon_1(x)$, $\lim_{x\to 0}\ \varepsilon_1(x) = 0$ et $g(x) = 1-3x+2x^2+x^2\varepsilon_2(x)$, $\lim_{x\to 0}\ \varepsilon_2(x) = 0$.

Exercice 25. Calculez le développement limité en 0 des fonctions suivantes :

(a) $(e^x - e^{-x})\sin(x)$, à l'ordre 3 (b) $\sin(x)\cos(x)$, à l'ordre 3
(c) $\sin^2(x)$, à l'ordre 4

Exercice 26. Calculez le développement limité en 0 des fonctions suivantes :

(a) $(1+2x-2x^2)^{1/2}$, à l'ordre 2 (b) $\sin(\sin(3x))$, à l'ordre 3

(c) $\sqrt{\cos(x)}$, à l'ordre 2 (d) $e^{\sqrt{1+x}}$, à l'ordre 2

Limites, tangentes, et asymptotes

Exercice 27. À l'aide de développements limités , déterminer les limites suivantes :

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2} \text{(b)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{\cos(x)-1}$$

Exercice 28. Utiliser des développements limités pour calculer les limites suivantes :

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\cos(2x)}{\sin^2(x)} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)}-\cos(x)}{\sin(x)} \qquad \text{(c)} \lim_{x\to 0} \frac{3\tan x - 3x}{x^3+x^2}$$

Exercice 29. Pour chacune des fonctions suivantes dont on donne le développement limité , déterminer une équation de sa droite tangente en 0 et la position relative de la courbe et de sa droite tangente au voisinage de 0. Dire s'il s'agit d'un extremum.

$$f_1(x) = \sqrt{1+2x-2x^2} = 1+x-\frac{3}{2}x^2+x^2\varepsilon(x) \qquad f_2(x) = \sin(x)(e^x-e^{-x}) = 2x^2+x^2\varepsilon(x)$$

$$f_3(x) = 3\tan x - 3x = x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad f_4(x) = 1-x^4+x^4\varepsilon(x)$$

Exercice 30. (a) Utiliser la formule de Taylor-Young pour écrire le développement limité d'ordre 2 en 1 de $f(x) = \arctan(x)$.
(b) En déduire une équation de la droite tangente en 1 à la courbe de f ainsi que la position relative de la courbe et la tangente.

Exercice 31. Soit $f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x})$.
En calculant un développement limité à l'ordre 2 de $f(\frac{1}{h})$ quand $h\to 0$, déterminer l'équation de l'asymptote de f en $+\infty$, et la position du graphe de f par rapport a l'asymptote au voisinage de $+\infty$.
(Complément) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$.

Exercice 32. Soit $f(x) = \sqrt{x^2+4x+2}$
(a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $hf(\frac{1}{h})$.
(b) Déduire l'équation de l'asymptote oblique de f en $+\infty$ et la position relative de la courbe de f et l'asymptote.
(c) Même questions en $-\infty$.

IV Réponses aux tests et exercices supplémentaires

Réponse au test 1. (a) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon_2(x)$, $\lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$
(b) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon_3(x)$, $\lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$

Réponse au test 2. $P(x) = -3+5x^2+x^2(-2x+x^2) = -3+5x^2+x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Réponse au test 3.
(a) $-\ln(1+x) = -x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)$.
Le DL de $\ln(1+u)$ avec $u=-x$ donne $\ln(1-x) = -x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)$.
(b) $2\cos(x) = 2-x^2+x^3\varepsilon(x)$.
$\cos(2x) = 1-2x^2+x^3\varepsilon(x)$.

Réponse au test 4. (a) Utiliser le DL de $(1+u)^\alpha$ avec $\alpha = 1/3$ et $u = 3x$. On trouve $1+x-x^2+x^2\varepsilon(x)$.

(b) Utiliser le DL de $(1+u)^\alpha$ (l'ordre 2 suffit !) avec $\alpha = 1/4$ et $u = x^2$. On trouve $1+\frac{1}{4}x+\frac{3}{32}x^2+x^2\varepsilon(x)$.

Réponse au test 5. $f(x^3) = 1+(x^3)-(x^3)^2+(x^3)^2\varepsilon(x^3) = 1+x^3-x^6+x^6\varepsilon_1(x)$.

Réponse au test 6. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x} = \dfrac{x-x^2/2+x^2\varepsilon_1(x)}{x+x^2\varepsilon_2(x)} = \dfrac{\cancel{x}(1-x/2+x\varepsilon_1(x))}{\cancel{x}(1+x\varepsilon_2(x))} \xrightarrow{x\to 0} \dfrac{1}{1} = 1$

Réponse à l'exercice 23. (a) $\ln(1+x)+e^x = 1+2x+\frac{1}{2}x^3+x^3\varepsilon(x)$. (b) $e^x+e^{-x} = 2+x^2+x^3\varepsilon(x)$. (c) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x)-\ln(1-x) = 2x+\frac{2}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)$.

Réponse à l'exercice 24. On ne connait que le DL à l'ordre 2 de g en 0, donc on ne peut déterminer que le DL à l'ordre 2 de $f+g$. On a $f(x) = 2+x-x^2+x^2\varepsilon_3(x)$, donc $(f+g)(x) = 3-2x+x^2+x^2\varepsilon_4(x)$.

Réponse à l'exercice 25. (a) $(e^x-e^{-x})\sin(x) = 2x^2+x^3\varepsilon(x)$. (b) $\sin(x)\cos(x) = (x-\frac{1}{6}x^3)(1-\frac{1}{2}x^2)+x^3\varepsilon(x)) = x-\frac{2}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)$. (c) $\sin^2(x) = x^2-\frac{1}{3}x^4+x^4\varepsilon(x)$.

Réponse à l'exercice 26. (a) $\sqrt{1+2x-2x^2} = 1+x-\frac{3}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)$ (b) $\sin(\sin(3x)) = 3x-9x^3+x^3\varepsilon(x)$ (c) $\sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1-\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)} = 1-\frac{1}{4}x^2+x^2\varepsilon(x)$. (d) $e^{\sqrt{1+x}} = e+\frac{e}{2}x+x^2\varepsilon(x)$.

Réponse à l'exercice 27. (a) $+\infty$. (b) 1

Réponse à l'exercice 28. (a) $\dfrac{\cos(x)-\cos(2x)}{\sin^2(x)} = \dfrac{x^2(\frac{3}{2}+\varepsilon(x))}{x^2(1+\varepsilon(x))} \to \dfrac{3}{2}$.

(b) $\dfrac{e^{\sin(x)}-\cos(x)}{\sin(x)} = \dfrac{x(1+\varepsilon_1(x))}{x(1+\varepsilon_2(x))} = \dfrac{1+\varepsilon_1(x)}{1+\varepsilon_2(x)} \to 1$.

(c) $\dfrac{3\tan x-3x}{x^3+x^2} = \dfrac{x^3(1+\varepsilon(x))}{x^2(1+x)} = x\dfrac{1+\varepsilon(x)}{1+x} \to 0$.

Réponse à l'exercice 29. *Avertissement. On ne connait que le comportement de $\varepsilon(x)$ proche de 0, donc on peut étudier la position relative de la courbe et de sa tangente que proche de 0.*

(a) équation de la tangente : $y_1 = 1+x$; la courbe est en dessous de y_1 proche de 0.

(b) équation de la tangente : $y_2 = 0$; la courbe est au-dessus ; on a un minimum local en 0.

(c) équation de la tangente : $y_3 = 0$; la courbe est au-dessus de la tangente si $x > 0$ et en dessous si $x < 0$ (proche de 0) ; ce n'est pas un extremum.

(d) équation de la tangente : $y_4 = 1$; la courbe est en dessous ; on a un maximum local en 0.

Réponse à l'exercice 30. $\arctan(x) = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+(x-1)^2\varepsilon(x-1)$, $\lim\limits_{x\to 1}\varepsilon(x-1) = 0$.

L'équation de la tangente est donc $y = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)$. La courbe est en dessous de sa tangente au voisinage de 1.

Réponse à l'exercice 31. $f(\frac{1}{h}) = \frac{1}{h}\ln(1+h) = \frac{1}{h}(h-\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon(h)) = 1-\frac{1}{2}h+h\varepsilon(h)$, où $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. Donc en posant $h = \frac{1}{x}$, on a $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1-\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$, où $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$. On en déduit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc $y = 1$ est asymptote horizontale en $+\infty$. De plus, $f(x)-1 = \frac{1}{x}(-\frac{1}{2}+\varepsilon(\frac{1}{x})) < 0$ pour x suffisamment grand.

On en déduit que $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{f(x)} \to e^1 = e$.

Réponse à l'exercice 32. (a) $hf(1/h) = 1+2h-h^2+\dfrac{1}{h^2}\varepsilon(h)$.

(b) $f(x) = x+2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\varepsilon(\dfrac{1}{x}))$. $y = x+2$ est asymptote oblique en $+\infty$ et la courbe est en-dessous de l'asymptote.

(c) Si $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$. Donc $f(x) = -x-2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}))$. $y = -x-2$ est asymptote et la courbe est encore en-dessous de l'asymptote.

Formulaire de développements limités en 0

Développements limités classiques en 0, à connaître par cœur. (Chaque fonction $\varepsilon(x)$ vérifie $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \pm \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + x^n\varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + x^n\varepsilon(x)$$

Rappel : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$, et $\displaystyle\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}$.

Quelques exemples

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + x^9\varepsilon(x) \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + x^8\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^5\varepsilon(x) \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^5\varepsilon(x)$$

Développements limités classiques qui ne sont pas à connaître par cœur (mais qu'il faut savoir retrouver)

	Méthode
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + x^4\varepsilon(x)$	$\alpha = \frac{1}{2}$
$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + x^4\varepsilon(x)$	$\alpha = \frac{1}{3}$
$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$	$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + x^9\varepsilon(x)$	$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

Formules de Taylor-Young (à connaître) :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)), \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n\varepsilon(h)), \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$