Mécanique : Cours complet Et Exercices

Sommaire

Mohamed El Founani
Lycée Ibn Maja

Les lois de Newton :

Complément mathématique :

Vecteur vitesse :

Définition : Le vecteur vitesse instantanée d'un mobile ponctuel en un point M est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

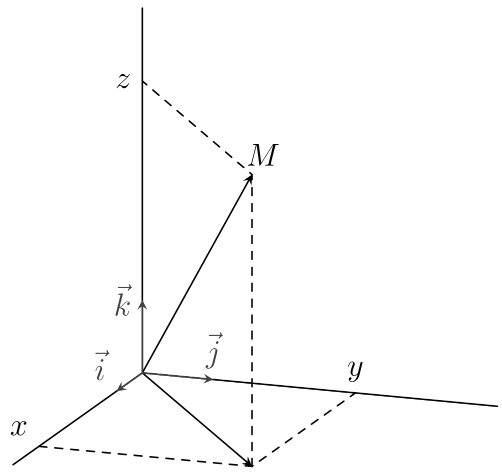
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$$

Le vecteur vitesse instantanée en un point M a les caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} \text{Origine :} & \text{Le point } M \\ \text{Direction :} & \text{La tangente à la trajectoire au point } M \text{à la date } t \\ \text{sens :} & \text{Celui de mouvement à cet instant} \\ \text{norme :} & \text{La valeur positive} \|\vec{v}\| = v \end{cases}$$

Dans le système international d'unités, la vitesse instantanée s'exprime en m/s.

Vecteur vitesse et cordonnées cartésiennes :



Dans le repère cartésien $\mathscr{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Sa norme est :

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Le vecteur vitesse est donc :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$$

Soit autrement :

$$\begin{aligned} \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} \\ &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \end{aligned}$$

En posant $\dot{x} = v_x, \dot{y} = v_y$ et $\dot{z} = v_z$, les composantes du vecteur $\vec{v}$, on obtient :

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

La norme de $\vec{v}$ est :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Vecteur accélération :

Définition : Le vecteur accélération instantanée $\vec{a}$, d'un mobile ponctuel, en un point M, est la dérivée du vecteur vitesse $\vec{v}$ par rapport au temps, ou la dérivée seconde du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps.

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$$

Vecteur accélération et cordonnées cartésiennes :

Dans le repère cartésien $\mathscr{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et avec les expressions qui précèdent on obtient :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

Donc, on peut écrire autrement :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

C'est-à-dire :

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

En posant $\ddot{x} = a_x, \ddot{y} = a_y$ et $\ddot{z} = a_z$, les composantes du vecteur $\vec{a}$, on obtient :

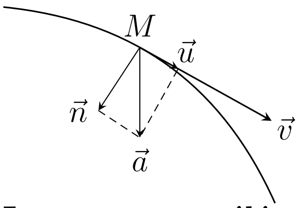
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Dans le repère d'espace cartésien le vecteur $\vec{a}$ est toujours dirigé vers la concavité du trajectoire rectiligne, sa mesure s'exprime en m/s^2.
La norme du vecteur accélération peut être calculée par :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Vecteur accélération et base de Frenet :

Le mobile ponctuel M décrit une trajectoire que nous supposerons plane.
. Le vecteur vitesse, à la date t, est tangente à cette trajectoire et a le sens du mouvement, et le vecteur accélération est dirigé vers la concavité du trajectoire.
Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tangent en M à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ le vecteur unitaire orthogonal au vecteur $\vec{u}$ et orienté vers l'intérieur de la trajectoire.



La base $(\vec{u}, \vec{n})$ associée au point M, à la date t, constitue le repère de projection de Frenet. Le vecteur $\vec{a}$ se décompose en deux vecteurs, vecteur accélération tangentielle et normale.

Le vecteur accélération tangentielle :

$$\vec{a}_t = a_t\vec{u} \qquad \text{avec} \qquad a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

L'accélération tangentielle caractérise la variation de la mesure algébrique de la vitesse. **Le vecteur accélération normale :**

$$\vec{a}_n = a_n\vec{u} \qquad \text{avec} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

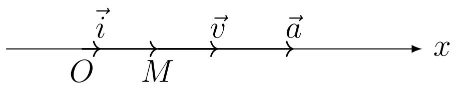
ρ est le rayon de courbure de la trajectoire en M, c'est-à-dire si on parle d'un cercle ρ est le rayon du cercle, si on parle d'une ellipse ρ est son rayon...
On écrit alors dans le repère de Frenet :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_t + \vec{a}_n \\ &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}\end{aligned}$$

Le mouvement :

Mouvement rectiligne :

Les mouvements rectilignes sont des mouvements dont les trajectoires sont droites.



Le vecteur position s'écrit dans ce cas :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$$

Le vecteur vitesse est :

$$\vec{v} = v_x\vec{i} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}$$

Le vecteur accélération est :

$$\vec{a} = a_x\vec{i} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}$$

Mouvement rectiligne uniforme :

Définition : Le point M est dit en mouvement rectiligne uniforme si sa trajectoire est une droite et si son vecteur vitesse est constant par rapport au temps :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 = \overrightarrow{\mathrm{Cte}}$$

Donc sa dérivée par rapport au temps, qui est l'accélération est nulle :

$$\vec{a} = \vec{0}$$

L'équation horaire du mouvement : Dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v_0 \\ \mathrm{d}x &= v_0\mathrm{d}t \\ \int \mathrm{d}x &= \int v_0\mathrm{d}t \\ x &= v_0t + c\end{aligned}$$

On pose $c = x_0$ l'abscisse à l'instant t_0, d'où l'équation horaire suivante :

$$x = v_0t + x_0$$

Mouvement rectiligne uniformément varié :

Définition : Le point M est dit en mouvement rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est une droite et si son vecteur d'accélération est constant :

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{Cte}}$$

Les équations horaires du mouvement : Dans le cas d'un mouvement rectiligne uniformément varié :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\
a\ \mathrm{d}t &= \mathrm{d}v \\
\int a\ \mathrm{d}t &= \int \mathrm{d}v \\
at + c &= v \\
at + v_0 &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
at + v_0 \mathrm{d}t &= \mathrm{d}x \\
\int at + v_0 &= \int \mathrm{d}x \\
\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + c' &= x
\end{aligned}$$

En posant $c' = x_0$, on obtient :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Les équations horaires sont :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\
v &= at + v_0
\end{aligned}$$

Mouvement accéléré et retardé :

Un mouvement est dit accéléré si la norme de son vecteur vitesse croît au cours du temps :

$$\vec{v}.\vec{a} > 0$$

Un mouvement est retardé si la norme de son vecteur vitesse décroît au cours du temps :

$$\vec{v}.\vec{a} < 0$$

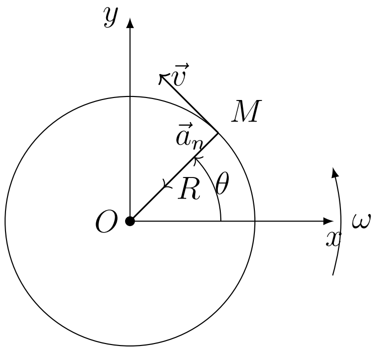
Mouvement circulaire :

Mouvement circulaire uniforme :

Définition : Un mouvement circulaire est dit uniforme si la valeur algébrique de la vitesse du point mobile est constante : $v = v_0$
La vitesse angulaire d'un mouvement circulaire uniforme est :

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R}$$

Elle est exprimée en rad/s. R est le rayon de la trajectoire circulaire.



Dans un mouvement circulaire uniforme :
L'accélération tangentielle est nulle :

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

Le vecteur accélération normale est exprimé par :

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Période et fréquence :

. La période d'un mouvement circulaire uniforme est la durée d'un tour.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Elle est exprimée en (s).
. La fréquence d'un mouvement circulaire uniforme est le nombre de tours par seconde.

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Elle est exprimée en (Hz).

Les équations horaires :

Équation horaire angulaire : On va utiliser l'expression de ω pour aboutir à cette équation :

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$
$$\omega \mathrm{d}t = \mathrm{d}\theta$$
$$\int \omega \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}\theta$$
$$\omega t + c = \theta$$

En posant $c = \theta_0$ l'angle à $t = 0$, on trouve :

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

Équation horaire curviligne : On rappelle que : $s = R\theta$, on multiplie les membres de l'équation précédente par R et on la trouve :

$$s = v_0 t + s_0$$

s signifie l'arc parcouru à l'instant t, il s'exprime en (m).

Les lois de Newton :

La première loi de Newton :

Énoncée : Dans un référentiel galiléen, tout corps isolé (aucune force n'est appliquée) ou pseudo-isolé (la somme des forces est nulle) est soumis d'un mouvement rectiligne uniforme $\vec{v} = \overrightarrow{Cte}$ ou il est immobile $\vec{v} = \vec{0}$.
On rappelle qu'un référentiel est dit galiléen ou inertiel, si le principe d'inertie reste applicable.
Pour déterminer le mouvement d'un mobile, il est nécessaire de choisir un corps référentiel indéformable. On associe au corps référentiel un repère d'espace ($\mathscr{R}$) déterminé par son origine O sa base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La deuxième loi de Newton :

Énoncée : Dans un repère galiléen, la somme des forces qui s'exercent sur un corps est égale au produit de la masse du corps et de son vecteur d'accélération.
Mathématiquement :

$$\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a}$$

Cette loi est appelée *Le principe fondamentale de la dynamique.* Le principe d'inertie n'est qu'une conséquence de cette loi, car lorsque $\vec{v} = \overrightarrow{Cte}$ l'accélération devient nulle, d'où la somme des forces est nulle. On dit que le système est en équilibre.

$$\sum_i \vec{F_i} = \vec{0}$$

La troisième loi de Newton :

Énoncée : Lorsqu'il y a une interaction entre deux corps A et B, le corps A exerce une force sur le corps B, on la note $\vec{F}_{A/B}$, et le corps B exerce une force de même intensité $\vec{F}_{B/A}$ ces deux vecteurs sont liés vectoriellement par la relation suivante :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

Leur intensité est :

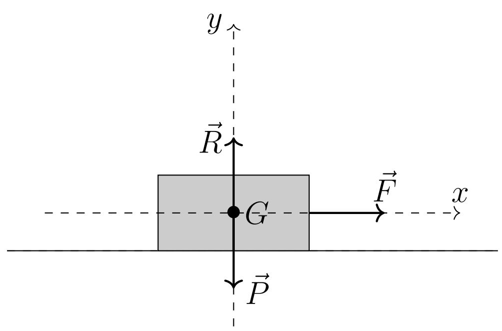
$$F_{A/B} = F_{B/A} = G\frac{m_A m_B}{d^2}$$

G est la constante de gravitation universelle elle vaut $6,67 \times 10^{-11}$N.m^2.kg^{-2}, et d la distance qui les sépare.

Applications :

Cas du mouvement sur un plan horizontal sans frottement :

On considère un corps solide (S) en mouvement sur un plan horizontal sans frottement sous l'action d'une force constante $\vec{F}$ comme l'indique la figure suivante :



Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} & \text{: Le poids du corps} \\ \vec{R} & \text{: La réaction du plan} \\ \vec{F} & \text{: La force appliquée au } (S) \end{cases}$$

D'après la deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}$.
On considère le référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe un repère (G, x, y). Trouvons l'expression de $\|\vec{a}\|$:

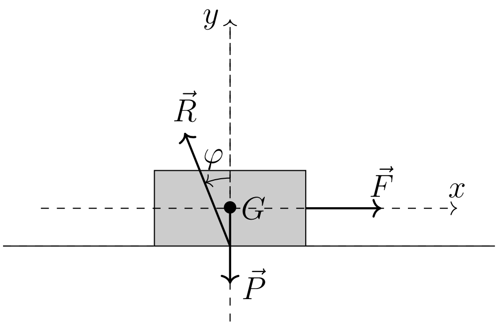
On projette les forces et on trouve :

$$\begin{cases} F+0+0 &= ma_x \\ R-P+0 &= ma_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F &= ma \\ R-P &= 0 \end{cases}$$

Donc : $a = \dfrac{F}{m}$

Cas du mouvement sur un plan horizontal avec frottement :

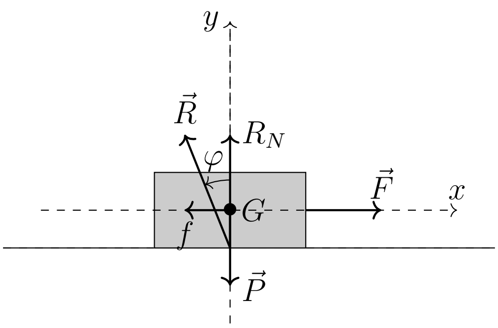
On considère un corps solide (S) en mouvement sur un plan horizontal avec frottement sous l'action d'une force constante $\vec{F}$ comme l'indique la figure suivante :



Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} & \text{: Le poids du corps} \\ \vec{R} & \text{: La réaction du plan} \\ \vec{F} & \text{: La force appliquée au } (S) \end{cases}$$

D'après la deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}$.
On considère le référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe un repère (G, x, y).



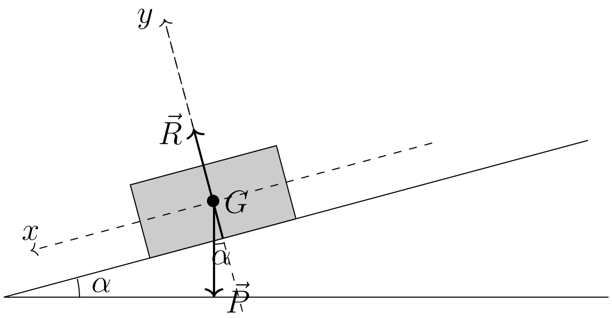
$$\begin{cases} F-f &= ma_x \\ R_N-P &= ma_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f &= F-ma \\ R_N &= P \end{cases}$$

La norme du vecteur $\vec{R}$ est donnée par : $\|\vec{R}\| = \sqrt{f^2 + R_N^2}$.
Le coefficient de frottement est donné par :

$$\kappa = \tan\varphi = \frac{f}{R_N} \Longleftrightarrow \varphi = \arctan\kappa$$

Cas du mouvement sur un plan incliné sans frottement :

On libère un corps solide (S) de masse m sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale et il glisse sans frottement vers le bas.



Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} & : \text{Le poids du corps} \\ \vec{R} & : \text{La réaction du plan} \end{cases}$$

D'après la deuxième loi de Newton :

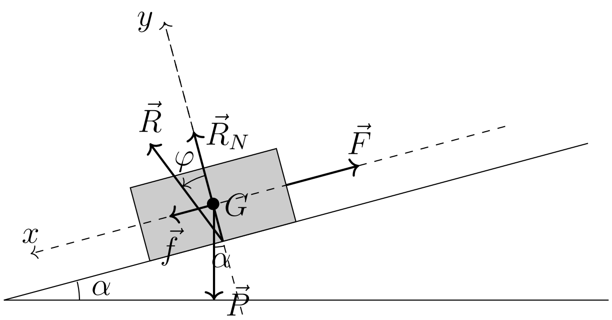
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

On considère le référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe un repère (G, x, y). Trouvons l'expression de $\|\vec{a}\|$:

$$\begin{cases} P\sin\alpha & = ma \\ R - P\cos\alpha & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = g\sin\alpha$$

Cas du mouvement sur un plan incliné avec frottement :

On tire un corps solide (S) de masse m sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale en utilisant une corde, il glisse avec frottement vers le haut.



Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} & : \text{Le poids du corps} \\ \vec{R} & : \text{La réaction du plan} \\ \vec{T} & : \text{La tension du corde} \end{cases}$$

D'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

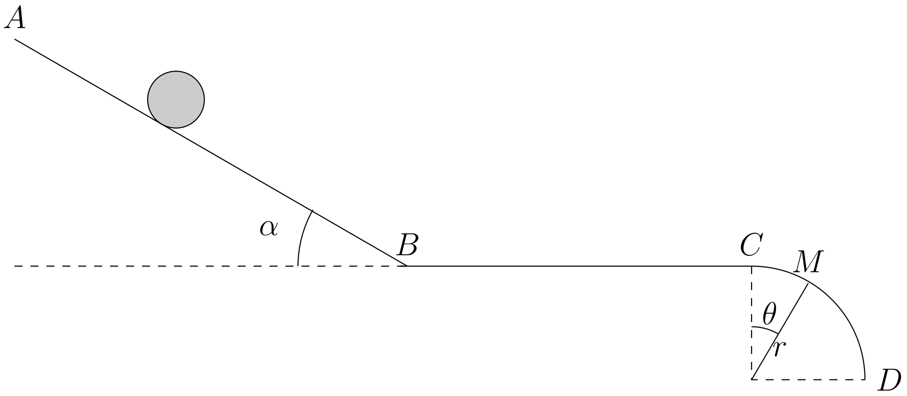
On considère le référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe un repère (G, x, y).

$$\begin{cases} f + P\sin\alpha - F & = ma \\ R_N - P\cos\alpha & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f & = F + m(a - g\sin\alpha) \\ R_N & = P\cos\alpha \end{cases}$$

Donc : $R = \sqrt{f^2 + R_N^2}$

Cas du mouvement curviligne :

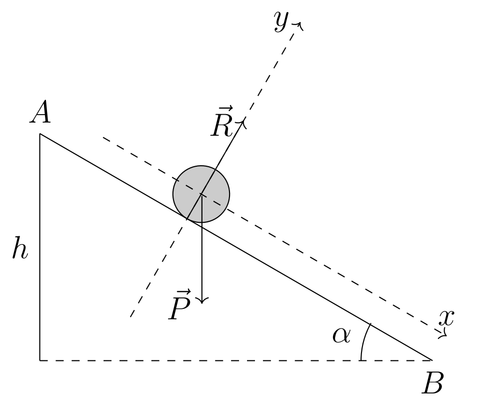
Une bille (S) de masse m se déplace sur un un rail $ABCD$, contenant trois portions, comme l'indique la figure suivante :



. La portion AB est inclinée d'une angle α où le mouvement se fait sans frottement.
. La portion BC horizontale où le mouvement se fait avec frottement.
. La portion CD est circulaire de rayon r, le mouvement se fait sans frottement.

Déterminons $\|\vec{a}\|$: Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} & : \text{Le poids du corps} \\ \vec{R} & : \text{La réaction du plan} \end{cases}$$



D'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

On considère le référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe un repère (G, x, y). Trouvons l'expression de $\|\vec{a}\|$:

$$\begin{cases} P \sin\alpha & = ma \\ R - P\cos\alpha & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = g \sin\alpha$$

Supposant que $v_A = 0\text{m/s}$, déterminons la vitesse au point B v_B, en utilisant le théorème d'énergie cinétique :
Rappel :
Théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum W\left(\vec{F}\right)$$

L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Le travail d'une force :

$$W\left(\vec{F}\right) = \vec{F}.\vec{l} = F.l.\cos\left(\widehat{\vec{F};\vec{l}}\right)$$

$$W\left(\vec{P}\right) = \pm mgh$$

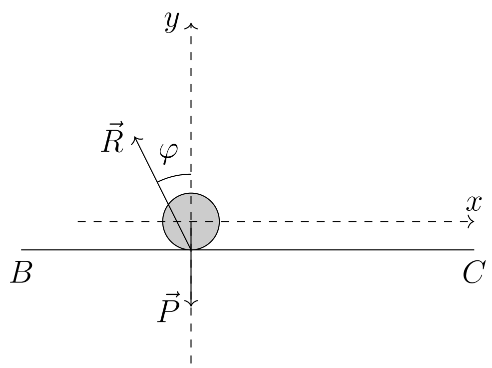
Réponse : On a d'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum W \iff E_{c_B} - \underbrace{E_{c_A}}_{0} = W\left(\vec{P}\right) + \underbrace{W\left(\vec{R}\right)}_{0}$$

$$\iff \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh$$

$$\iff v_B = \sqrt{2gAB\sin\alpha}$$

Sur la portion BC la bille glisse en frottement jusqu'à son arrêt au point C, déterminons $\|\vec{a}\|$:



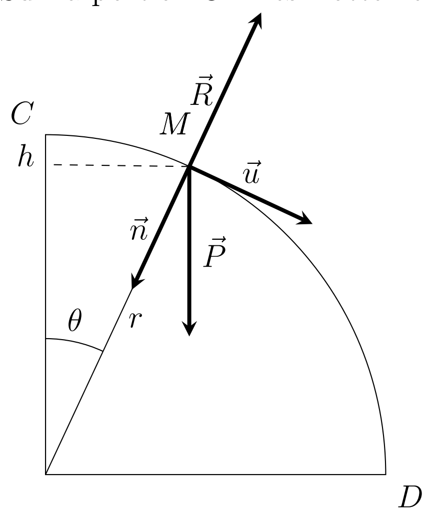
D'après la deuxième loi de Newton on a :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \iff \vec{R} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Par projection sur l'axe des abscisses on trouve :

$$-f = ma \iff a = -\frac{f}{m}$$

Sur la portion CD les frottements sont négligeables, la balle (S) est animé par un point M :



On utilise le repère de Frenet, d'après la deuxième loi de Newton on a :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \iff \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Sur l'axe $(M, \vec{u})$ on a $P\sin\theta = ma_t$, et l'axe $(M, \vec{n})$ on a $+P\cos\theta - R = ma_n$, par suite :

$$\begin{cases} P\sin\theta & = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ P\cos\theta - R & = m\dfrac{v^2}{r} \end{cases}$$

On a :

$$R = P\cos\theta - m\frac{v^2}{r}$$

v ici signifie la vitesse en point M, trouvons son expression, d'après le théorème de l'énergie cinétique on a :

$$\begin{aligned}\Delta E_c = \sum W &\iff E_{c_M} - \underbrace{E_{c_C}}_{0} = W\left(\vec{P}\right) + \underbrace{W\left(\vec{R}\right)}_{0} \\ &\iff \frac{1}{2}mv_M^2 = mgh \\ &\iff \frac{1}{2}v_M^2 = gr(1-\cos\theta) \\ &\iff v_M = \sqrt{2gr(1-\cos\theta)}\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}R &= P\cos\theta - m\frac{v_M^2}{r} \\ &= mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) \\ &= 3mg\cos\theta - 2mg \\ &= mg(3\cos\theta - 2)\end{aligned}$$

D'où $R = mg(3\cos\theta - 2)$

EX 01

Les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ au cours du mouvement d'un corps solide dans un repère orthonormé $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ sont :

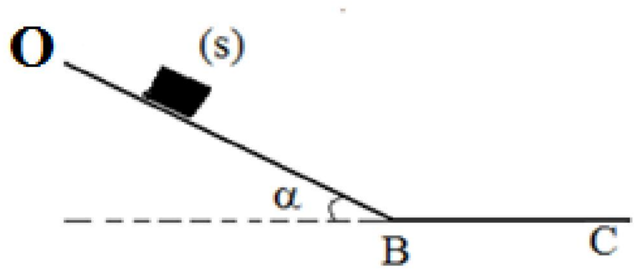
$$\begin{cases} x = t+3 \\ y = t^2 - t + 3 \end{cases}$$

1. Trouver l'équation de la trajectoire $y = f(x)$ .En déduire sa nature .
2. Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_G}$ dans le repère R .
3. Calculer la norme de la vitesse $\overrightarrow{V_G}$ à la date t = 1,5 s.
4. Trouver les coordonnées du vecteur accélération $\overrightarrow{a_G}$ dans le repère R .
5. Calculer la norme du vecteur accélération $\overrightarrow{a_G}$.
6. Déterminer la nature du mouvement du mobile (accéléré ou retardé).

EX 02

Un skieur (avec ses équipements) assimilé à un corps solide de masse m=70 kg, décrit une piste formée par deux parties:
* OB, une pente inclinée de 20° avec le plan horizontal
* BC, une voie rectiligne et horizontale.
* Le contact entre le skieur avec ses équipements se fait sans frottements sur la partie OB =2,4 m .

* L'intensité de gravitation g = 9,81 m.s^{-2} .
On étudie le mouvement du corps (S) dans un repère galiléen.$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$



La partie OB :

1-En appliquant la 2ème loi de Newton, déterminer l'abscisse a_{Gx} du vecteur accélération du centre d'inertie du (S). Quelle est la nature de son mouvement ?

2- Déterminer les équations horaires v(t) et x(t) du mouvement, on prend comme origine des dates lorsque le skieur est au point O et sa vitesse initiale est nulle.

3- Déterminer l'instant t_B ou le corps (S) atteint le point B .

4- Calculer la vitesse du skieur au point B.

5-Calculer l'intensité de la réaction du plan sur le skieur .

La partie BC :

Le solide (S) arrive au point B avec la vitesse V_B . On prend comme origine des dates et d'espace lorsque le skieur atteint le point B . Le contact entre le plan BC et (S) se fait avec frottements équivalents à une force $\vec{f}$ constante et horizontale $f = 80N$ et de sens opposé à celui du mouvement .

1- En appliquant la 2ème loi de Newton, déterminer l'abscisse a_{Gx} du vecteur accélération

2- Déterminer les équations horaires v(t) et x(t) du mouvement.

3- Déterminer l'instant t_C sachant que (S) arrête au point C .

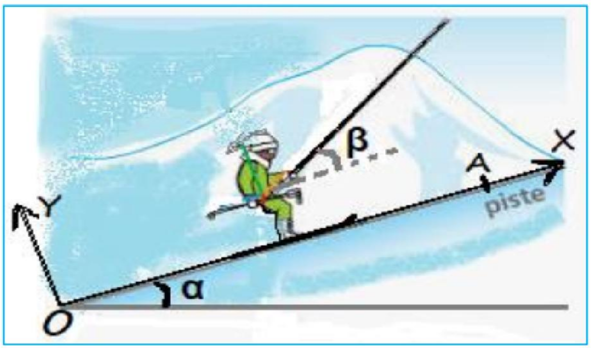
4- Calculer la distance BC .

5-Calculer l'intensité de la réaction du plan sur le skieur .

6- En déduire le coefficient de frottement K et l'angle de frottement φ .

EX 03

On étudie le mouvement d'un skieur sur une piste inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale.
Le skieur est tiré par un câble faisant un angle β avec la grande pente du plan incliné et exerçant une force constante d'intensité F= 450N sur le skieur . le mouvement se fait avec frottements.



Données :
-Masse du skieur m=80Kg
– Intensité de gravitation $g=9,81\ m.s^{-2}$
–la distance OA=150m ;
– l'angle d'inclinaison α=20° et β=15°
- Force de frottement considérée constante f= 90 N .

1-En appliquant la 2eme loi de Newton déterminer l'abscisse a_{Gx} de vecteur accélération du centre d'inertie de skieur . Quelle est la nature de son mouvement ?

2- Déterminer les équations horaires v(t) et x(t) du mouvement, on prend comme origine des dates lorsque le skieur est au point O et la vitesse initiale nulle.

3- Calculer la vitesse du skieur au point A.

4-Calculer l'intensité de la réaction du plan sur le skieur .

EX 04

Une piste BCD dans un plan vertical est constituée d'une partie BC horizontale de longueur BC=80cm et d'une partie CD circulaire de rayon r=10cm. On lance , à t=0 , un corps (S) de masse m=200g à partir du point B origine de repère (B,x) considéré galiléen avec une vitesse initiale v_B=2m.s^{-1} et le corps (S) se déplace sur la partie BC avec frottement. On prend g ≈ 9,81m.s^{-2} .

1-Trouver l'expression de la force de frottement f , calculer sa valeur sachant que l'accélération a_{Gx} du centre d'inertie est a_{Gx} = - 2m.s^{-2} .

2-Calculer la valeur de la réaction de la partie BC sur le corps (S) . Déduire la valeur de l'angle de frottement.

3-En utilisant les équations horaires v(t) et x(t) déterminer la vitesse v_C au point C .

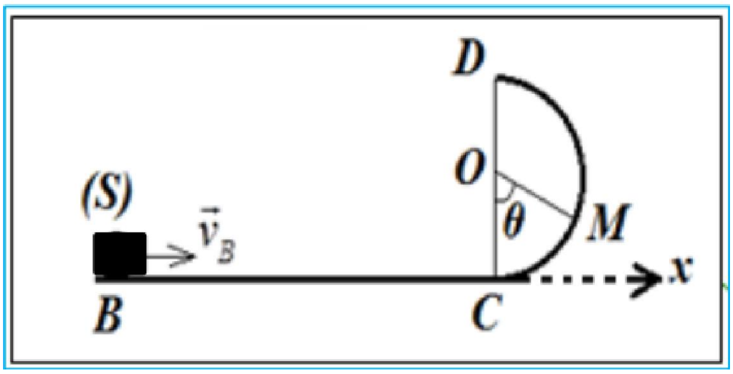
4-Arrivant au point C , le corps (S) continue son mouvement sur la partie circulaire CD sans frottement .

4-1- Trouver l'expression de la force de réaction R appliquée par la partie CD sur le corps (S) à la position M repérée par l'angle θ en fonction de : m , g , r , θ et v_M la vitesse au point M .

4-2- Appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre C et M et montrer que l'expression de v_M s'écrit :
$v_M = \sqrt{v_C^2 - 2.g.r\,(1-\cos\theta)}$.

4-3- Déterminer la valeur de l'angle maximal θ_{max} pour lequel le solide (S) revient dans le sens inverse .

4-4- Calculer l'intensité de la force de réaction R à cet angle.



Rappel : dans le repère de Frenet , le vecteur accélération s'écrit :

$$\overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_n} = a_T.\vec{u} + a_n.\vec{n} \quad \text{avec : } a_T = \frac{dv}{dt} \text{ et } a_n = \frac{v^2}{r}$$

EX 05

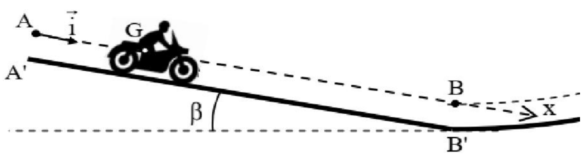
Cet exercice se propose d'étudier le mouvement du centre d'inertie G d'un système (S) formé d'un motard et d'une moto se déplaçant sur une piste de compétition.

Cette piste est formée d'une partie rectiligne A'B' inclinée d'un angle β par rapport à l'horizontale

Dans tout l'exercice, les frottements sont négligés et l'étude du mouvement du centre d'inertie G est réalisée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Données :

- L'angle $\beta = 10°$;
- Intensité de la pesanteur : $g = 10\ m.s^{-2}$;
- Masse du système (S) : $m = 190$ kg.



A un instant choisi comme origine des dates (t = 0), le système (S) s'élance sans vitesse initiale, d'une position où le centre d'inertie G est confondu avec le point A.

Le système est soumis, au cours de son mouvement sur la partie A'B', à la réaction du plan incliné, à son poids et à une force motrice $\vec{F}$ constante, dont la ligne d'action est parallèle à la trajectoire de G et le sens est celui du mouvement. Pour étudier le mouvement de G au cours de cette phase, on choisit un repère d'espace $(A, \vec{i})$ parallèle à A'B' (figure 1) et on repère la position de G par son abscisse x.

1. En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'expression de l'accélération a_G du mouvement de G est :

$$a_G = \frac{F}{m} + g.\sin\beta$$

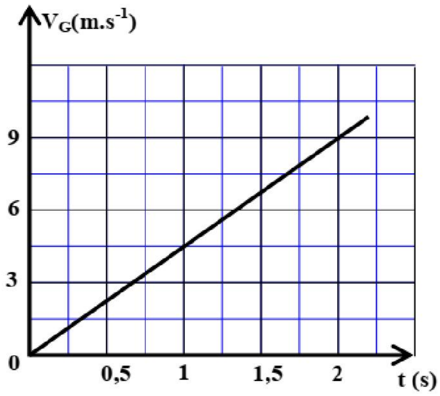


Figure 2

2. La courbe de la figure 2 représente les variations de la vitesse instantanée V_G du centre d'inertie G en fonction du temps.

En exploitant cette courbe, trouver la valeur de l'accélération a_G .

3. Déduire l'intensité F de la force motrice.

4. Ecrire l'expression numérique de l'équation horaire x= f(t) du mouvement de G.

5. Sachant que AB = 36 m, déterminer l'instant t_B de passage de G par le point B.

6. Calculer la vitesse V_B de passage de G par le point B.

EX 06

Données :- Masse du skieur : $m=60\,kg$;
-Intensité de l'accélération de la pesanteur : $g=9,8\,m.s^{-2}$.
On néglige l'action de l'air.

On étudie le mouvement du centre d'inertie G du skieur dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ lié à un référentiel terrestre considéré galiléen(figure 1).
Pour atteindre le sommet S d'une piste (P) rectiligne inclinée d'un angle $\alpha=23°$ par rapport à l'horizontale, le skieur part du point O sans vitesse initiale à t=0. Il est accroché à un câble rigide faisant un angle $\beta=60°$ avec l'horizontale. Le câble exerce sur le skieur une force de traction $\vec{F}$ constante dirigée selon la direction du câble(figure 1).

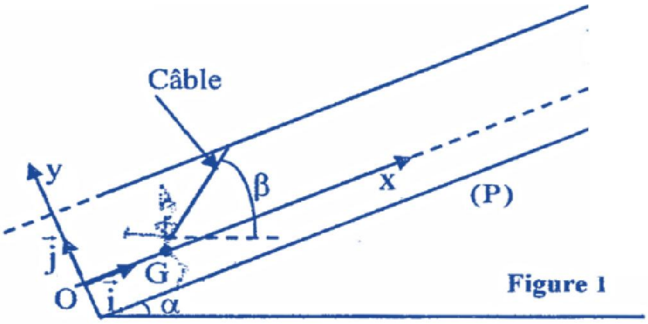


Figure 1

Durant toute cette phase, le skieur reste constamment en contact avec le sol. On note $\vec{R_T}$ et $\vec{R_N}$ respectivement les composantes tangentielle et normale de l'action du plan incliné sur le skieur avec $\|\vec{R_T}\|=k\|\vec{R_N}\|$; k étant le coefficient de frottement solide et $\|\vec{R_T}\|=f=80\,N$.

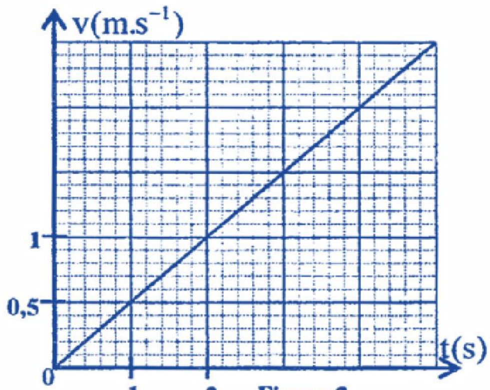


Figure 2

1 -En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v du centre d'inertie G s'écrit : $\frac{dv}{dt}+\frac{f}{m}+g.\sin\alpha-\frac{F}{m}\cos(\beta-\alpha)=0$.

2- - La courbe de la figure 2 représente la variation de la vitesse v en fonction du temps.

1-2 -Déterminer graphiquement la valeur de l'accélération du mouvement de G.

2-2- Déduire l'intensité de la force de traction $\vec{F}$.

-3- Déterminer la valeur de k .

EX 07

On lance, à l'instant $t_0=0$, un solide (S) de la position O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0=v_0.\vec{i}$. Le solide glisse selon la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On étudie le mouvement de G, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ lié à la Terre supposé galiléen (figure1).
L'abscisse de G à $t_0=0$ est $x_G=x_0=0$.

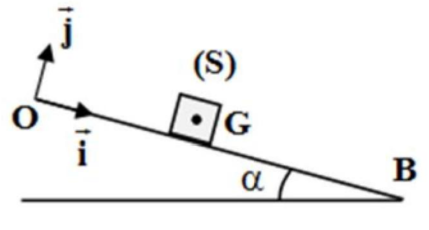


Figure 1

Données : $m = 0,2\ kg$; $g = 10\ m.s^{-2}$; $v_0 = 2\ m.s^{-1}$; $\alpha = 11°$

1. On suppose les frottements négligeables.

1.1. En appliquant la deuxième loi de Newton, exprimer l'accélération a_1 du mouvement de G en fonction de g et α.

Déduire la nature du mouvement de G.

1.2. Écrire l'expression numérique de l'équation horaire du mouvement de G.

2. La chronophotographie du mouvement de (S) à l'aide d'un système d'acquisition convenable a permis d'obtenir la courbe de la figure (2) qui donne les variations de la vitesse v_G de G en fonction du temps.

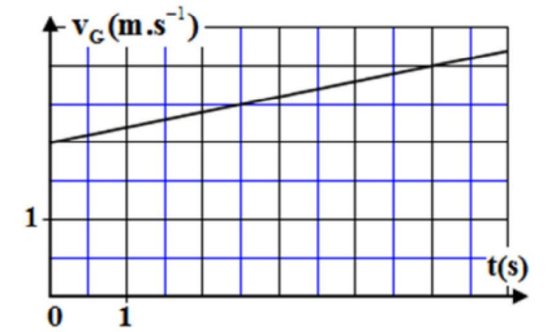


Figure 2

2.1. Déterminer graphiquement la valeur expérimentale de l'accélération a_2 du mouvement de G.

2.2. Montrer que le mouvement de G se fait avec frottement.

2.3. Les frottements auxquels est soumis le solide (S) sont équivalents à une force $\vec{f}$ constante colinéaire à la vitesse $\vec{v}$ et de sens contraire. Déterminer l'intensité de la force $\vec{f}$.

EX 08

Un solide (S) de centre d'inertie G et de masse $m = 0,4\ kg$ glisse avec frottement sur un plan horizontal OAB. On modélise les frottements par une force $\vec{f}$ constante de direction parallèle à la trajectoire et de sens contraire à celui du mouvement.

Pour étudier le mouvement de (S), on choisit un repère $(O,\vec{i})$ lié à la terre considéré comme galiléen.

1. Le solide (S) est soumis, lors de son mouvement entre O et A, à une force motrice $\vec{F}$ constante, horizontale ayant le sens du mouvement (figure 1).

On choisit l'instant de départ de (S), à partir de O, sans vitesse initiale comme origine des dates $t_0=0$.

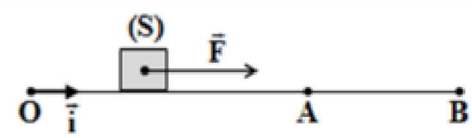


Figure 1

1.1 En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle que vérifie l'abscisse x de G dans le repère $(O,\vec{i})$ est : $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F-f}{m}$.

1.2. le solide (S) passe par A à l'instant $t_A = 2\ s$, avec la vitesse $v_A = 5\ m.s^{-1}$.

Déterminer la valeur de l'accélération a_1 du mouvement de G entre O et A.

2. La force $\vec{F}$ s'annule lorsque le solide (S) passe par A. Le solide (S) continue son mouvement et s'arrête en B. On choisit l'instant de passage de (S) par A comme nouvelle origine des dates $(t_0=0)$. Le solide (S) s'arrête en B à l'instant $t_B = 2,5\ s$.

2.1. Montrer que la valeur algébrique de l'accélération entre A et B est $a_2 = -2\ m.s^{-2}$.

2.2. En déduire l'intensité de la force de frottement $\vec{f}$.

3. En utilisant les résultats obtenus, calculer l'intensité de la force motrice $\vec{F}$.

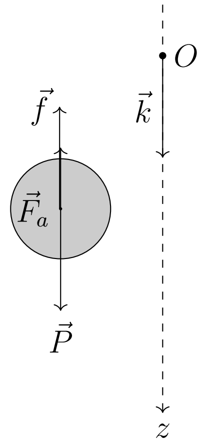
La chute verticale :

Les forces agissantes sur un solide en chute verticale :

Le vecteur $\vec{P}$:

Dans le champ de pesanteur terrestre, tous les solides sont soumis à une force exercée par la terre, c'est le poids du corps.
Le vecteur poids est le produit de la masse m du solide et le vecteur champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$



Force de frottement fluide :

On modélise l'ensemble de forces de frottement entre le solide et le fluide par une seule force $\vec{f}$, c'est la force de frottement fluide.
Il existe plusieurs types de forces de frottement fluide :
. Si le solide est petit et sa vitesse est faible, le vecteur s'écrit :

$$\vec{f} = -h.v.\vec{k}$$

. Si le solide est grand et sa vitesse est grande, le vecteur s'écrit :

$$\vec{f} = -h.v^2.\vec{k}$$

Généralement la force de frottement fluide est de sens opposé à celui du vecteur vitesse et d'intensité :

$$\vec{f} = -h.v^n.\vec{k}$$

h est le coefficient de frottement fluide en kg.s^{-1}, il dépend de la forme et le volume du solide, ainsi la nature du fluide et sa viscosité.

La poussée d'Archimède :

Tout solide immergé dans un fluide est soumis à l'action d'une force exercée par ce fluide.
Cette force est appelée poussée d'Archimède, notée $\vec{F_a}$.
La poussée d'Archimède est égale à l'opposée du vecteur poids du volume du fluide déplacé :

$$\vec{F_a} = -\vec{P_f} = -m_f\vec{g}$$

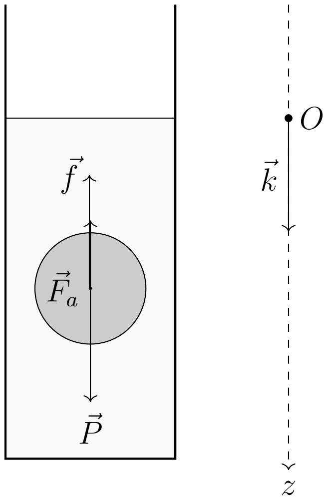
Avec $m_f = \rho_f.V$, la masse du fluide déplacé, ρ_f la masse volumique du fluide et V son volume déplacé.
D'où les caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} \text{La direction :} & \text{Verticale} \\ \text{Le sens :} & \text{Vers le haut} \\ \text{La norme :} & F_a = \rho_f.V.g \end{cases}$$

Chute verticale d'un corps dans un fluide par frottement :

L'équation différentielle vérifiée par la vitesse :

On considère une bille de masse m complètement immergée dans un fluide :



Le système étudié : {La bille}
Bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} : & \text{Le poids de la bille} \\ \vec{F_a} : & \text{La poussée d'Archimède} \\ \vec{f} : & \text{La force de frottement} \end{cases}$$

Dans le référentiel terrestre supposée galiléen on associe le repère (O, z), En appliquent la deuxième loi de Newton :

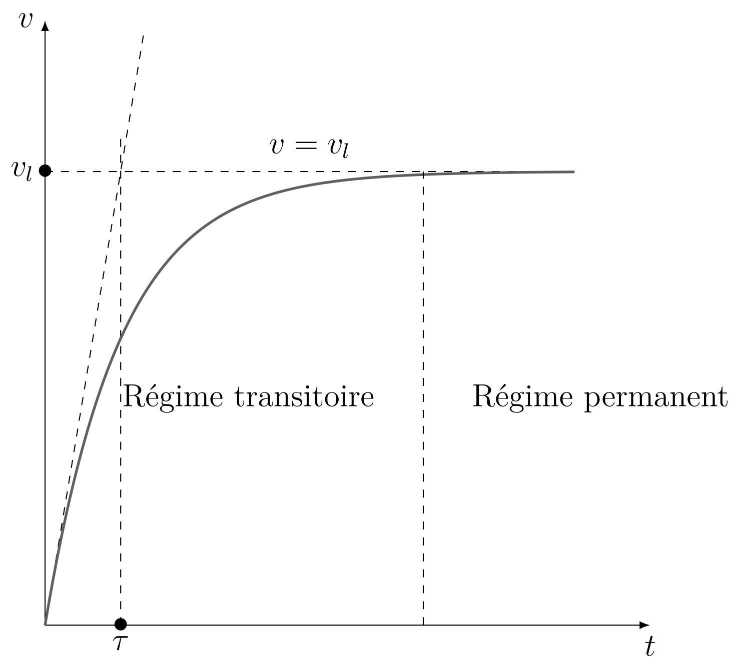
$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{P} + \vec{F_a} + \vec{f} &= m\vec{a} \\ P - F_a - f &= ma \\ mg - \rho V g - hv^n &= ma \\ \underbrace{g\left(1 - \frac{\rho V}{m}\right)}_{A} - \underbrace{\frac{h}{m}}_{B} v^n &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Donc l'équation différentielle est donnée par :

$$A - Bv^n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Les régimes d'une chute verticale :

Au cours d'une chute verticale on distingue deux régimes, qui sont :
Le régime initial (transitoire) : Dans lequel la vitesse croit au cours du temps.
Le régime permanent : Dans lequel la vitesse reste constante au voisinage d'une vitesse appelée vitesse limite v_l.



Régime transitoire :
La vitesse de la bille augmente, la valeur de f augmente et l'accélération diminue.
Régime permanent :
La vitesse de la bille et la valeur de f deviennent constantes et l'accélération est nulle.
L'accélération à $t = 0$ est donnée par :

$$a_0 = \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{v_l}{\tau}$$

Ou bien à partir l'équation différentielle :

$$A - Bv^n = a \xrightarrow{v=0} a = A = g\left(1 - \frac{\rho V}{m}\right)$$

La vitesse limite peut être calculé graphiquement, ou bien à partir l'équation différentielle :

$$A - Bv^n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{v=v_l} A - Bv_l^n = 0$$
$$v_l = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$$

Remarque : La durée du mouvement initial, c'est-à-dire la durée dans du régime transitoire est environ 5τ.

La méthode d'Euler pour la résolution approchée d'une équation différentielle :

Supposons que nous ayons une équation différentielle de la forme :

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - Bv^n$$

La méthode d'Euler est une méthode qui nécessite la répétition du même calcul, elle permet de savoir la vitesse à un instant donnée. Elle comporte deux étapes :
La première étape : Si on connait la vitesse initiale v_0, on détermine la valeur de a_0 à partir la relation suivante : $a_0 = A - Bv_0^n$.

La deuxième étape : À un instant $t_1 = t_0 + \Delta t$, avec Δt est très petite, on a : $\Delta v = v_1 - v_0$ et $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$,en supposant que $v_0 = 0$, on déduit que : $v_1 = a_0\Delta t = A\Delta t$, d'où : $a_1 = A - Bv_1^n$.
À l'instant $t_2 = t_1 + \Delta t$, on a : $\Delta v = v_2 - v_1 = a_1\Delta t$ c'est-à-dire $v_2 = a_1\Delta t + v_1$ et $a_2 = A - Bv_2^n$.
En suivant les mêmes étapes on peut calculer jusqu'au v_n et a_n, car la méthode d'Euler est itérative.

Généralisation de la méthode d'Euler :

À un instant t_i, on écrit :

$$a_i = \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_i} = A - Bv_i^n$$

À l'instant $t-i+1 = t_i+\Delta t$, où Δt est infinitésimal (très petite), on peut adopter l'approximation suivante :

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} \approx \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_i} = a_i$$

Ceci conduit à la relation suivante :

$$v_{i+1} = v_i + a_i\Delta t$$

La combinaison de ces relations nous permet de connaître v et a à chaque pas Δt, en suivant un enchainement de calcul :

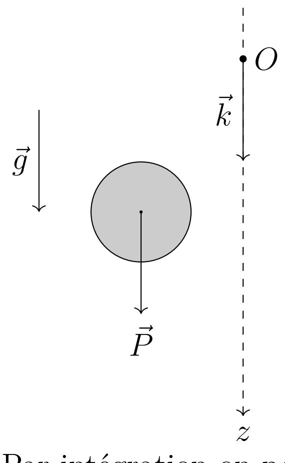
$$\begin{array}{lll}
t_0 = 0 & v_0 = 0 & a_0 = A - Bv_0 \\
t_1 = t_0 + \Delta t & v_1 = v_0 + a_0\Delta t & a_1 = A - Bv_1^n \\
t_2 = t_1 + \Delta t & v_2 = v_1 + a_1\Delta t & a_2 = A - Bv_2^n \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
t_i = t_{i-1} + \Delta t & v_i = v_{i-1} + a_{i-1}\Delta t & a_i = A - Bv_i^n
\end{array}$$

La chute libre verticale :

La chute libre :

Un solide est en chute libre lorsqu'il est soumis qu'à l'action de son poids, cette chute n'est réalisable que si le solide se trouve dans le vide.

Les équations horaires du mouvement :



On applique la deuxième loi de Newton :

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F} &= m\vec{a} \\
\vec{P} &= m\vec{a} \\
m\vec{g} &= m\vec{a} \\
\vec{g} &= \vec{a}
\end{aligned}$$

Par projection sur l'axe (Oz) on trouve :

$$a = g \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = g$$

Par intégration on peut déduire que :

$$\begin{aligned}
v &= gt + v_0 \\
z &= \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0
\end{aligned}$$

Mouvements de chutes verticales : Exercices

Exercice 1 : QCM

1. À la surface de la terre , plus un corps est massif, plus il tombe vite .

(a) oui (b) non

2. Les forces de frottements de l'air sur une voiture en marche avant fournissent un travail .

(a) moteur (b) résistant

3. Les forces de frottements de l'air sur une voiture en marche arrière fournissent un travail

(a) moteur (b) résistant

4. Deux corps ont la même forme , donc ont même coefficient de force de frottement fluide λ dans l'air . Ils n'ont pas la même masse . lequel des deux a plus grande vitesse limite de chute ?

(a) le plus massif (b) le moins massif

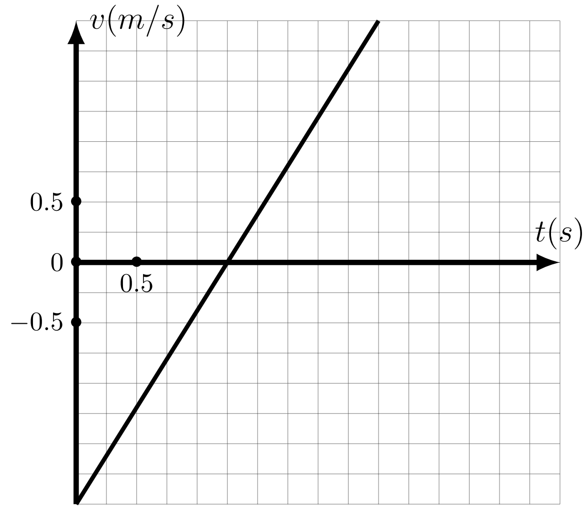
5. On suppose qu'un parachute est soumis à une force de frottement fluide $\mu.v^2$ (sillage turbulent). Lorsque linstructeur saute en tandem avec l'élève , leur vitesse verticale après déploiement du parachute est :

(a) identique (b) 40% plus grande (c) deux fois plus grande

que dans le cas où l'élève saute seul (on suppose qu'ils ont le même poids , et on néglige le poids du parachute) .

Exercice 2 :

En exploitant un film réalisé lors d'une mission Appolo, on a enregistré le mouvement vertical du centre d'inertie G d'un solide en chute libre sur la lune . On repère l'évolution de la vitesse v de G au cours du temps suivant un axe vertical orienté vers le bas . L'exploitation de cet enregistrement conduit au graphique ci- dessous . la date t=0 correspond au début de l'enregistrement .



1. Quelle est la valeur de l'accélération de G lors du mouvement ?
2. Quelle est la valeur de la vitesse initiale ?
3. Dans quel sens le mobile a-t-il été lancé ?
4. Le solide est lancé d'un point dont dont l'abscisse a pour valeur $z_0 = 0.5m$

a. Établir l'expression de la vitesse de G en fonction du temps avec les valeurs numériques précédemment déterminées.

b. Établir ensuite l'expression de l'abscisse z en fonction de temps t .

Exercice 3 : Calculer la poussée dArchimède
La bille d'un roulement a un volume $V = 4,4 \times 10^{-6} m^3$ et une masse $m = 34g$. L'intensité de la pesanteur est $g = 10m/s^2$.
1. Calculer le poids de cette bille .
2. La bille est placée dans l'air dont la masse volumique est $\rho_{air} = 1,3kg/m^3$.
a. Calculer la poussée d'Archimède qui s'exerce sur la bille .
b. Comparer la poussée d'Archimède et le poids .
3. La bille tombe d'ans un liquide dont la masse volumique est : $\rho_{liq} = 0,89 \times 10^3 kg.m^3$
a. Calculer la poussée d'Archimède qui s'exerce sur la bille .
b. Comparer la poussée d'Archimède et le poids .

Exercice 4 : Calcule une viscosité
Lorsque la vitesse est faible , un objet sphérique de rayon R se déplaçant dans un fluide est soumis , à une force de frottement fluide $\vec{f}$ dont la valeur peut être calculée par la formule de STOKES : $f = 6.\pi.\eta.R.v$. Dans cette expression , η est la viscosité du fluide .
1. déterminer , dans le système international , l'unité de viscosité .
2. Exprimer le vecteur force de frottement $\overrightarrow{f}$ en fonction du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$
3. Une bille de rayon $R = 1,0cm$ chute dans un fluide avec une vitesse $v = 1,4cm/s$. L'étude du mouvement montre que la force de frottement exercée par le fluide a une intensité $f = 2,2 \times 10^{-3} N$. Calculer la viscosité η de ce fluide .

Exercice 5 :
Une goutte d'eau colorée , assimilée à une sphère de rayon $r = 2mm$, chute dans l'huile contenue dans une éprouvette. La masse volumique de l'eau $\rho_e = 1,0 \times 10^3 kg/m^3$, celle de l'huile est : $\rho_h = 8,2 \times 10^2 kg/m^3$.
On note v la vitesse de la goutte d'eau. la valeur de f de la force de frottement fluide exercée par l'huile est donnée par la formule de STOKES : $f = 6.\pi.\eta.r.v$. Le coefficient η est la viscosité du fluide . Pour l'huile utilisée, on a $\eta = 80 \times 10^{-3} kg.m^{-1}.s^{-1}$. L'intensité de la pesanteur est $g = 9,81m/s^2$. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $V = \frac{4}{3}\pi.r^3$.
1. faire l'inventaire des forces exercées sue la goutte . Donner leurs expressions littérales .
2. Établir l'équation différentielle traduisant la vitesse de la goutte suivant un axe (Oz) vertical orienté vers le bas .
3. Montrer que cette équation différentielle peut s'écrire :

$$\frac{dv}{dt} = A - B.v$$

Calculer A et B .
4. Monter que la goutte atteint une vitesse limite . L'exprimer en fonction de A et B , et calculer A et B .

Exercice 6 :

On considère un parachutiste en chute dans l'air avant ouverture de son parachute . On suppose que la force de frottement fluide agissant sur le système{ parachutiste-parachute fermé} est $-\lambda.\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de chute et $\lambda = 14S.I$ est une constante .

À l'instant t_0, le parachutiste ouvre son son parachute . On considère que l'ouverture de celui- ci est instantanée , et on considère que le parachutiste avait atteint sa vitesse limite de chute avant l'ouverture du parachute . On suppose que la force de frottement fluide agissant sur le système { parachutiste-parachute fermé} est $-\mu.\vec{v}$, où $\mu = 350S.I.$

1. En quelle unité du système International s'exprime λ et μ ?
2. Quelle était la vitesse limite v_0 de chute du parachutiste avant l'ouverture de parachute ?
3. Quelle est la nouvelle vitesse limite de chute v_1 lorsque le parachute est ouvert ?
4. En établissant le bilan des forces agissant sur le système { parachutiste-parachute fermé} , écrire l'équation différentielle vérifiée par $v(t) - v_1$. La résoudre et en déduire le graphe de v(t) pour $t > t_0$.

Données :

Masse du système { parachutiste-parachute fermé} $= 70kg$

Intensité de pesanteur : $g = 10m/s^2$

Exercice 7 : La grêle

La grêle se forme dans les cumulo-nimbus situés entre 1 000 m et 10 000 m d'altitude où la température est très basse, jusquà $40°C$. Le grêlon tombe lorsqu'il n'est plus maintenu au sein du nuage. Au sol, sa vitesse peut atteindre 160 km/h. On étudie un grêlon de masse 13 g qui tombe d'un point O d'altitude 1 500 m sans vitesse initiale. Il peut être assimilé à une sphère de diamètre 3,0 cm.

Le point O sera pris comme origine d'un axe Oz orienté positivement vers le bas. L'intensité de la pesanteur sera considérée comme constante et de valeur $g_0 = 9,80ms^{-2}$

On donne : volume d'une sphère : $V = \dfrac{4}{3}\pi.r^3$ et la masse volumique de l'air : $\rho_{air} = 1,3kgm^{-3}$.

A. On admettra que le grêlon tombe en chute libre.

1. En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer les équations horaires donnant la vitesse et la position du centre dinertie G du grêlon en fonction de la durée t de la chute.
2. Calculer la valeur de la vitesse lorsqu'il atteint le sol. Ce résultat est-il vraisemblable ? Justifier.

B. Chut réelle

En réalité le grêlon est soumis à deux autres forces, la poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_A}$ et la force de frottement fluide $\overrightarrow{f}$ proportionnelle au carré de la vitesse telle que $f = K.v^2$.

1. Par une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité du coefficient K dans le système international.
2. Donner l'expression de la valeur de la poussée d'Archimède ; la calculer et la comparer à celle du poids. Conclure.

C. On néglige la poussée d'Archimède.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement.

Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

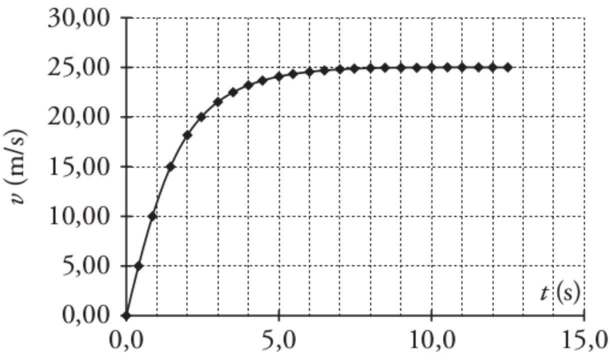
$$\frac{dv}{dt} = A - B.v^2$$

2. On veut résoudre cette équation différentielle par une méthode numérique : la méthode d'Euler. Le tableau suivant est un extrait d'une feuille de calcul des valeurs de la vitesse (v)

et de l'accélération (a) en fonction du temps (t). Il correspond aux valeurs : $A = 9,80ms^{-2}$ et $B = 1,56 \times 10^{-2}m^{-1}1$, pas de variation $\Delta t = 0,5s$.

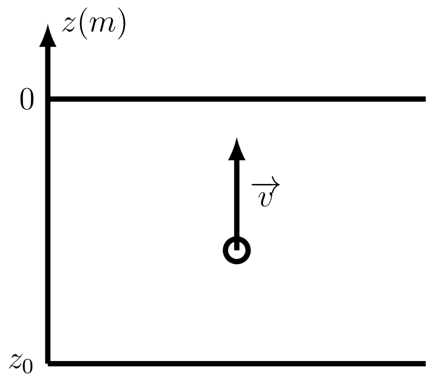
t(s)	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
v(m/s)	0,00	4,90	9,61	13,8	17,2	v_5	21,6
v(m/s)	9,80	9,430	8,36	6,838	a_4	3,69	2,49

Déterminer a_4 et v_5 en détaillant les calculs.
3. Exprimer littéralement la vitesse limite atteinte par le grêlon en fonction de A et B , puis calculer sa valeur numérique.
4. La courbe d'évolution de la vitesse en fonction du temps est donnée ci-dessous. Retrouver graphiquement la valeur de la vitesse calculée au paragraphe précédent.



Exercice 8 : Bulle d'air dans une piscine

Un plongeur au fond d'une piscine, de profondeur$z_0 = 3,0m$, produit une petite bulle d'air à l'instant $t = 0s$. La bulle sera supposée sphérique dans tout l'exercice. Initialement, la bulle a un rayon $r(z_0) = r_0 = 0,50mm$.
La température de l'eau et de l'air de la bulle est constante : $T_0 = 300K$.



La pression de l'eau de la piscine varie en fonction de la profondeur z selon la relation de la statique des fluides :

$$P_{eau}(z) = P_{atm} - \rho.g.z$$

avec :
$P_{atm} = 1,0 \times 10^5 Pa$, la pression à la surface de l'eau ($z = 0m$) ;
$\rho = 1,0 \times 10^3 kg.m^3$, la masse volumique de l'eau ;
$g = 8,80m/s^2$, l'intensité de la pesanteur.
La pression de l'air dans la bulle est toujours égale à la pression de l'eau à la même profondeur.
On donne la constante des gaz parfaits : R = 8 , 314 S.I.
1. En faisant l'hypothèse que l'air de la bulle se comporte comme un gaz parfait, déterminer l'expression du rayon de la bulle $r(z)$ en fonction de la profondeur.
2. Calculer la quantité de matière n_{air} d'air contenue dans la bulle.
3. Calculer le rayon de la bulle lorsqu'elle va finalement atteindre la surface. On néglige la variation du rayon de la bulle, si cette variation est inférieure à 10% (en valeur absolue) de la valeur initiale. Peut-on la négliger ?
4. Si l'air a une masse molaire de $M(air) = 29gmol^{-1}$, calculer la masse m de la bulle, puis donner les caractéristiques du poids P de la bulle.
5. Donner les caractéristiques de la poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_A}$ qui s'applique sur la bulle en

fonction du rayon r_0 de la bulle.
6. La bulle est également soumise à une force de frottement fluide de la forme $\vec{f} = 6.\pi.\eta.r_0.\vec{v}$ avec la viscosité de l'eau$\eta = 1,010^{-3} Pas$, le rayon de la bulle r_0 (en mètre) et le vecteur vitesse v de la bulle.
a) Placer, sur un schéma, les forces qui s'appliquent sur la bulle.
b) Le mouvement de la bulle étant vertical, établir l'équation différentielle régissant la vitesse verticale v de la bulle en fonction du temps.
7. On montre que la vitesse v (t) est de la forme :

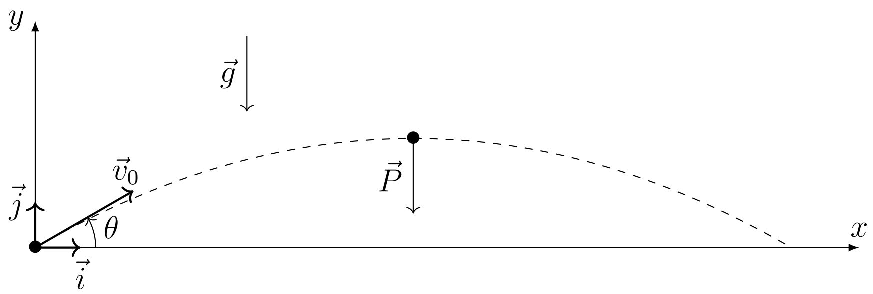
$$v(t) = v_l \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Sachant que $A + Be^x$ est nulle pour toutes valeurs de X si A = B = 0 , déterminer les valeurs de v_l et de τ telles que l'expression proposée de v soit solution.
8. Quelle vitesse maximale la bulle va-t-elle atteindre ?

Les mouvements plans :

Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme :

On lance un projectile de masse m d'un point O à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ qui fait une angle α avec l'horizontale. On considère le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ confondu avec le plan où le projectile est en mouvement, il est supposé galiléen.
Les conditions initiales : à $t = 0$ on a : $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$.



Les équations horaires du mouvement et vitesse :

Les composantes de $\vec{v}_0$ sont :

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} &= v_0 \cos\theta \\ v_{0y} &= v_0 \sin\theta \end{cases}$$

Le système étudié est {Le projectile}.
Le bilan des forces : Le projectile est soumis à son poids uniquement $\vec{P}$.
D'après la deuxième loi de Newton on a :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{P} &= m\vec{a} \\ m\vec{g} &= m\vec{a} \\ \vec{g} &= \vec{a} \end{aligned}$$

Projetons cette relation sur les axes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_x &= 0 \\ a_y &= -g \end{cases} &\iff \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -g \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} v_x &= v_{0x} \\ v_y &= -gt + v_{0y} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= v_0 \cos(\theta).t + x_0 \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\theta).t + y_0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= v_0 t \cos\theta \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta \end{cases} \end{aligned}$$

Donc **les équations horaires de vitesse** sont données par :

$$\begin{cases} v_x &= v_0 \cos\theta \\ v_y &= -gt + v_0 \sin\theta \end{cases}$$

Et ceux **du mouvement** sont :

$$\begin{cases} x &= v_0 t \cos\theta \\ y &= -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\theta \end{cases}$$

Étude de la trajectoire :

L'équation de la trajectoire est donné par :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + x \tan\theta$$

Elle est obtenue en posant $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta}$. C'est-à-dire en éliminant t entre x et y.

Les caractéristiques du mouvement :

La flèche :

C'est l'altitude maximale $h_{\max}$ atteinte par le projectile.
Soit S le point correspondant sur la trajectoire et situé dans le sommet de la trajectoire.
On a $v_{y_S} = 0$, c'est-à-dire :

$$-gt + v_0 \sin\theta = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

En remplaçant dans les expressions de x et y, on trouve :

$$x_S = v_0 \cos\theta \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{2g}$$

On utilise $\dfrac{\sin(2\theta)}{2} = \sin\theta\cos\theta$.
Et on a :

$$\begin{aligned} y_S &= -\frac{g}{2} \times \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2} + v_0 \sin\theta \frac{v_0 \sin\theta}{g} \\ &= -\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \\ &= h_{\max} \end{aligned}$$

La portée horizontale :

C'est l'abscisse x_P du point P de la trajectoire d'ordonnée nulle, c'est-à-dire situé sur l'axe (Ox), autrement dit $y_S = 0$, on obtient :

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x_P^2 + x_P \tan\theta = 0$$

C'est une équation qui donne deux solutions, dans notre cas, la première solution est x_0 qui correspond au point du lancement O.
Remarque : Si x_1 et x_2 sont les racines d'un polynôme $ax + bx + c$, alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Utilisons cette remarque et trouvons x_P :

$$\begin{aligned} x_P + x_0 &= \frac{2v_0^2 \cos^2\theta \tan\theta}{g} \\ x_P &= \frac{2v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} \\ &= \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \end{aligned}$$

La distance d **la portée horizontale** est :

$$d = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

La vitesse du centre d'inertie du projectile :

La vitesse du centre d'inertie à un instant t, s'écrit :

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

La norme est :

$$v = \sqrt{v_x r + v_y^2}$$

Avec :

$$v_x = v_0 \cos\theta \qquad \text{et} \qquad v_y = -gt + v_0 \sin\theta$$

Au point S le sommet on a $v_y = 0$ donc :

$$v_S = \sqrt{v_x^2} = v_0 \cos\theta$$

Remarque : La flèche est maximale si et seulement si : $\sin(2\theta) = 1 \Leftrightarrow \theta = \pi/4$.

Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$:

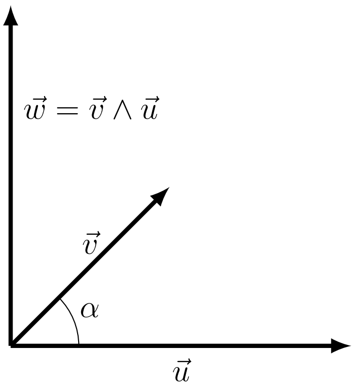
Complément mathématique :

Le produit vectoriel :

Le produit vectoriel $\vec{w}$ des deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$, s'écrit sous forme $\vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{u}$.
Sa direction est perpendiculaire au plan formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Son sens est déterminé à partir d'un trièdre direct ou par l'utilisation des trois doigts de la main droite.
Sa norme est déterminé en appliquant :

$$w = v.u. \sin\alpha$$

Où $\alpha = \left(\overline{\vec{v}\ ;\ \vec{u}}\right)$



Force de Lorentz :

Le champ magnétique $\vec{B}$:

Le champ magnétique $\vec{B}$ est une grandeur vectoriel, vu l'année dernière, $\vec{B}$ est caractérisée par, sa direction, son sens et sa norme mesurée en Tesla (T).
Cette année en verra que la présence du champ magnétique traduit l'existence d'une force agissante sur sur les particules chargées, de charge q et se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel donnée.

La relation de Lorentz :

À partir de la relation de Laplace (vue l'année dernière) qui s'applique aux conducteurs (une barre de fer par exemple), on peut démontrer la force qui s'applique aux électrons qui traversent ce conducteur :
La force de Laplace est donnée par :

$$\vec{F} = I\vec{l} \wedge \vec{B}$$

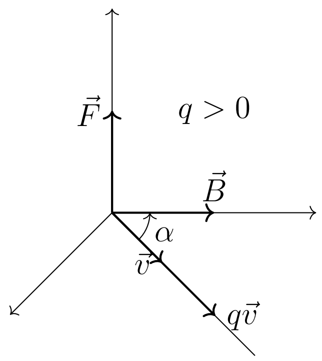
Et on a : $q = It$ et $\vec{l} = \vec{v}t$.
D'où :

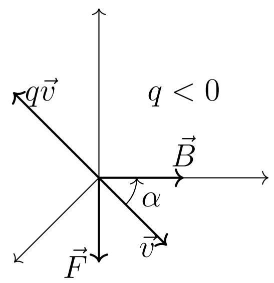
$$q\vec{v} = I\vec{l}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= I\vec{l} \wedge \vec{B} \\ &= q\vec{v} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

Cette relation est celle de Lorentz, qui décrit la force appliquée sur les particules chargés dans un champ magnétique, animées en une vitesse $\vec{v}$.
Remarque :
. Si la vitesse $\vec{v}$ a la même direction de $\vec{B}$, la particule ne subit pas de force car $(\widehat{\vec{v};\vec{B}}) = 0$ c'est-à-dire $\sin 0 = 0$.
. La force est maximale lorsque $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$, car $(\widehat{\vec{v};\vec{B}}) = \pi/2$.
. Les caractéristiques de la force :
  Direction : $\vec{F}$ est orthogonale à la fois à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$.
  Sens : Le trièdre $(q\vec{v};\vec{B};\vec{F})$ est direct.
  Intensité : $F = |q \sin\alpha| vB$.





Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique :

Dans tous ce qui suit, on considéreras que le poids de la particule est négligeable devant la force magnétique.

Cas général : $\vec{B}$ quelconque

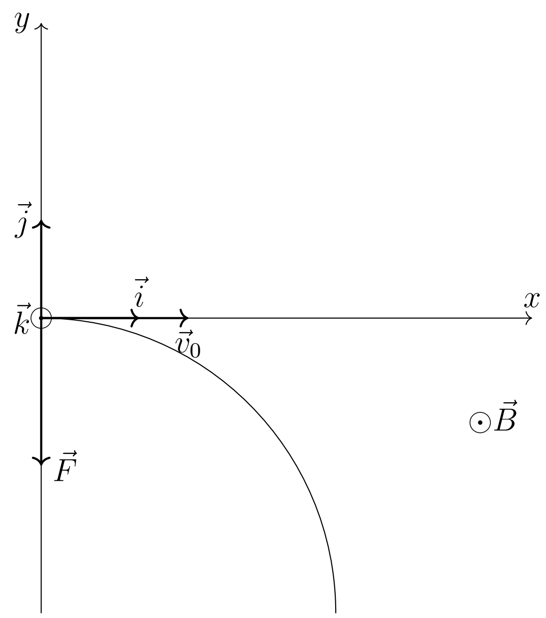
Dans un champ magnétique, le mouvement d'une particule chargé est uniforme. Si la particule est initialement au repos, elle reste au repos. La force magnétique ne modifie que la direction du vecteur vitesse de la particule.

Cas particulier

On considère le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique, qui répond aux conditions suivantes :
- . $\vec{B}$ est uniforme.
- . Il est orthogonal au vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ de la particule.

Pour décrire le mouvement de la particule dans le référentiel supposé galiléen, on choisit le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que : $\vec{B} = B\vec{k}$ et $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$.
La particule pénètre dans le champ en O à la date $t = 0$.
Dans ce repère, la particule est caractérisée par ces vecteurs position, vitesse et accélération.

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \qquad ; \qquad \vec{v}\begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \vec{a}\begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{cases}$$



Le mouvement de la particule dans le champ $\vec{B}$ est uniforme et circulaire, qui se fait dans un plan.
Démonstration :
Le système étudié : { La particule }
Les forces appliquées sur le systèmes : $\vec{F}$ La force magnétique.
Dans un repère terrestre considérée galiléen, on applique la deuxième loi de Newton :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Multiplions les membres de cette équation scalairement par $\vec{k}$:

$$\vec{a}.\vec{k} = \left(\frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}\right).\vec{k}$$

Or, $\vec{B}$ est colinéaire à $\vec{k}$, donc :

$$\vec{a}.\vec{k} = 0$$

Par suite, on déduit les équations suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{z} & = 0 \\ \dot{z} & = 0 \\ z & = 0 \end{cases}$$

La coordonnée z étant toujours nulle, le mouvement de la particule a lieu dans le plan (xOy) orthogonal à $\vec{B}$.
La particule a une trajectoire curviligne, utilisons le repère de Frenet pour exprimer l'accélération :

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

Et on sait que :

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Autrement :

$$\vec{a} = 0.\vec{u} + \frac{|q|}{m}vB.\vec{n}$$

D'où, on peut déduire le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} & = 0 \\ \frac{v^2}{\rho} & = \frac{|q|}{m}vB \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} v = v_0 & = \mathrm{C^{te}} \\ \rho = \frac{mv_0}{|q|B} & = \mathrm{C^{te}} \end{cases}$$

Ce qui montre que le mouvement est uniforme, et circulaire de rayon :

$$R = \frac{mv_0}{|q|B}$$

Remarque : La période T :
On sait que :

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{\frac{v_0}{R}} \\ &= \frac{2\pi R}{v_0} \\ T &= \frac{2\pi m}{|q|B} \end{aligned}$$

La période ne dépend pas de v_0.

Aspect énergétique :

La puissance :

La puissance $\mathscr{P}$ est le produit scalaire de la vitesse et la force. Or la force magnétique est perpendiculaire à $\vec{v}$, alors :

$$\mathscr{P} = \vec{F}.\vec{v} = F.v.\cos(\pi/2) = 0$$

Par suite on peut déduire que la force magnétique ne travaille pas.

L'énergie cinétique :

$$\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}mv_0^2$$

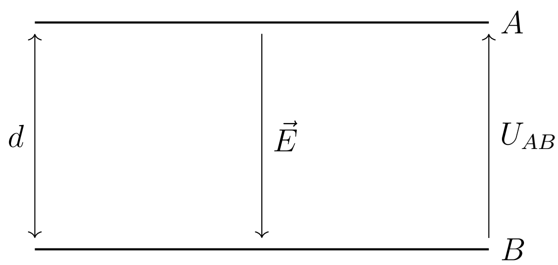
Le champ magnétique ne varie pas l'énergie cinétique de la particule chargée, donc :

$$\mathscr{E}_c = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$:

Le champ électrique $\vec{E}$:

Un champ électrique, est un champ crée par des particules chargées, souvent fixes dans le référentiel d'étude, $\vec{E}$ est caractérisé par : Sa direction, son sens et sa norme mesurée en V/m ou N/C.
On distingue deux cas : Si la charge est positive le champ est centrifuge, si elle négative alors le champ est centripète.
Cette année on s'intéressera au champs crées par les plaques appliquées entre eux une tension U et séparés par une distance d.



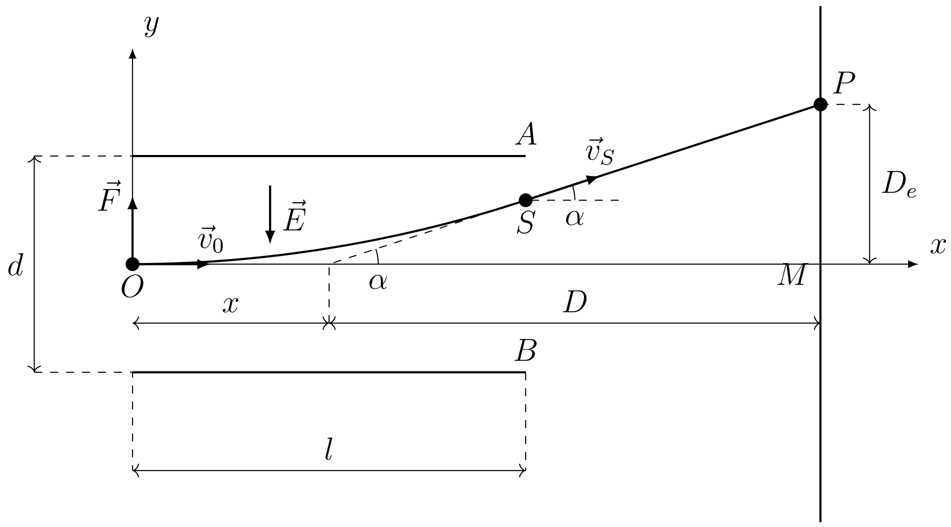
Les caractéristiques de $\vec{E}$:
Direction : Perpendiculaire aux plaques.
Sens : De la plaque ayant le grand potentiel vers celle ayant le potentiel petit.
Intensité : $E = \dfrac{U}{d}$

La force électrique :

Toute charge q placée dans une région de l'espace dominée par un champ électrique $\vec{E}$ est soumise à une force électrique : $\vec{F} = q\vec{E}$ et d'intensité : $F = |q|E$.
Si $q > 0$, alors $\vec{F}$ a le même sens de $\vec{E}$.
Si $q < 0$, alors $\vec{F}$ a le sens inverse de $\vec{E}$.

Déviation d'une charge :

En suivant les mêmes étapes de l'étude précédente, on va déterminer le vecteur position, vitesse et accélération.
Lorsque un électron pénètre dans un champ électrique $\vec{E}$, la force $\vec{F_e}$ est appliquée.



Le système étudié : { L'électron }
Les forces appliquées sur le système : $\vec{F}$ La force électrique.
Dans un repère considérée galiléen, on applique la 2$^{\text{ème}}$ loi de Newton :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

Par projection on trouve :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x &= 0 \\ a_y &= \dfrac{|q|}{m}E \end{cases} \overset{\int \mathrm{dt}}{\Rightarrow} \vec{v}\begin{cases} v_x &= v_0 \\ v_y &= \dfrac{|q|}{m}Et \end{cases} \overset{\int \mathrm{dt}}{\Rightarrow} \overrightarrow{OM}\begin{cases} x &= v_0 t \\ y &= \dfrac{|q|}{2m}Et^2 \end{cases}$$

Le mouvement de la particule est rectiligne uniforme selon l'axe (Ox), alors qu'il est rectiligne uniformément varié selon l'axe (Oy).
L'équation du trajectoire : Par élimination du temps entre x et y on trouve :

$$y = \frac{|q|E}{2mv_0^2}x^2$$

La trajectoire est donc une parabole

Les caractéristiques du mouvement :

La sortie :

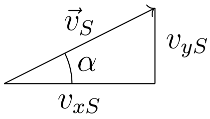
C'est le point S indiquée sur la figure. Il correspond au point où l'électron quitte le champ $\vec{E}$.
On $x_S = l$, en la remplaçant dans l'équation du trajectoire on obtient : $y_S = \dfrac{|q|El^2}{2mv_0^2}$.

$$S\begin{cases} x_S &= l \\ y_S &= \dfrac{|q|El^2}{2mv_0^2} \end{cases}$$

La vitesse à la sortie :

On sait qu'à S on a $t_S = l/v_0$, c'est la période nécessaire pour que la particule atteint S. D'où :

$$\vec{v}_S \begin{cases} v_{xS} &= v_0 \\ v_{yS} &= \dfrac{|q|El}{mv_0} \end{cases}$$



On a :

$$\tan\alpha = \frac{v_{yS}}{v_{xS}} = \frac{|q|El}{mv_0^2}$$

La déviation électrique :

Après sa sortie, la particule n'est plus soumise à la force électrique, elle continue donc son mouvement jusqu'à son arrivée à un point P, on remarque une distance importante D_e, c'est la distance qui sépare P du point d'impact M, si $\vec{E}$ était absent.
On a :

$$\tan\alpha = \frac{D_e}{D} = \frac{y_S}{x} \Longleftrightarrow D_e = \frac{y_S D}{x}$$

Calculons x :
On sait que : $\tan\alpha = \dfrac{|q|El}{mv_0^2}$ et on sait que $x = \dfrac{y_S}{\tan\alpha}$, d'où :

$$\begin{aligned} x &= \frac{|q|l^2E}{2mv_0^2} \times \frac{mv_0^2}{|q|El} \\ &= \frac{l}{2} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{|q|El}{2mv_0^2}\frac{2}{l}D \\ &= \frac{|q|U}{dmv_0^2}D \end{aligned}$$

D'où :

$$D_e = \frac{|q|D}{dmv_0^2}U$$

EXERCICE 1

1. Étude du mouvement d'un solide dans le champ de pesanteur uniforme

On lance, à un instant $t_0 = 0$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ horizontale, un solide (S) de petites dimensions, de masse m, d'un point A qui se trouve à la hauteur h du sol. Le solide (S) tombe sur le sol au point d'impact I (figure 1).

On étudie le mouvement du centre d'inertie G dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ lié à la terre supposé galiléen.

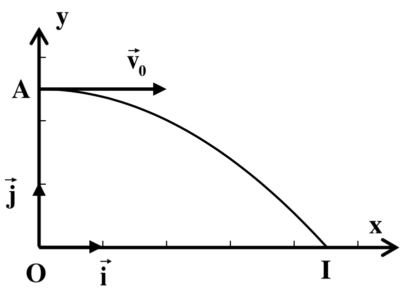


Figure 1

Données:

- Tous les frottements sont négligeables;
- $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$; $h = OA = 1\ m$

1.1. En appliquant la deuxième loi de Newton, établir les expressions littérales des équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement de G .

1.2. En déduire l'expression littérale de l'équation de la trajectoire du mouvement de G .

1.3. Calculer la valeur de t_I, l'instant d'arrivé de (S) au sol en I .

1.4. On lance de nouveau, à un instant $t_0 = 0$, le solide (S) du point A avec une vitesse initiale $\vec{v}'_0 = 3.\vec{v}_0$.

Recopier sur votre copie le numéro de la question et écrire la lettre correspondante à la seule proposition vraie:

la valeur de l'instant d'arrivé de (S) au sol vaut:

a	t' = 0,25 s	**b**	t' = 0,35 s	**c**	t' = 0,45 s	**d**	t' = 0,65 s

EXERCICE 2

La piste de course est constituée d'une partie rectiligne horizontale, d'une partie rectiligne inclinée d'un angle α par rapport au plan horizontal et d'une zone de chute comportant un obstacle (E) de hauteur L situé à la distance d de l'axe vertical passant par le point D , (fig1) .

Données : - Tous les frottements sont négligeables ;

- $\alpha = 26°$; $d = 20$ m ; $L = 10$ m ; $m = 190$ kg

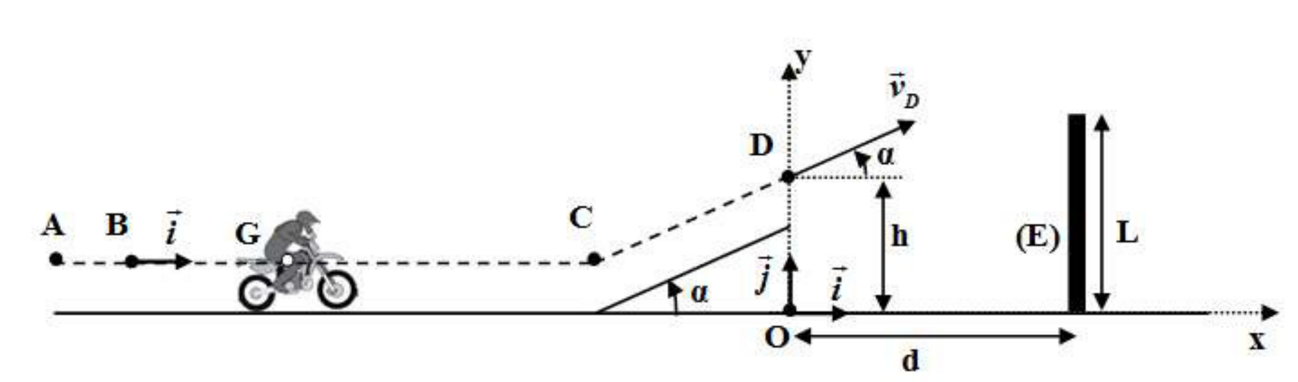


Figure 1

1. Mouvement du système (S) sur la partie horizontale

Le système (S) démarre d'une position ou son centre d'inertie G coïncide avec le point A. G passe par le point B avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0.\vec{i}$ à l'instant $t_0 = 0$ .Au cours de son mouvement, le système (S) est soumis à une force motrice horizontale constante $\vec{F}$ ayant le même sens du mouvement. La trajectoire de G est rectiligne.

Pour étudier le mouvement de G entre B et C on choisit le repère $(B,\vec{i})$ lié à la terre considéré comme galiléen. A $t_0 = 0$, on a : $x_G = x_B = 0$.

1.1. En appliquant la deuxième loi de newton, montrer que l'expression de l'accélération de G s'écrit : $a_G = \frac{F}{m}$. En déduire la nature du mouvement de G .

1.2. L'expression de la vitesse instantanée de G s'écrit $v_G(t) = a_G.t + v_0$.

a. Choisir, en justifiant votre réponse, la courbe qui représente la vitesse instantanée $v_G(t)$ parmi les quatre courbes représentées sur la figure (2).

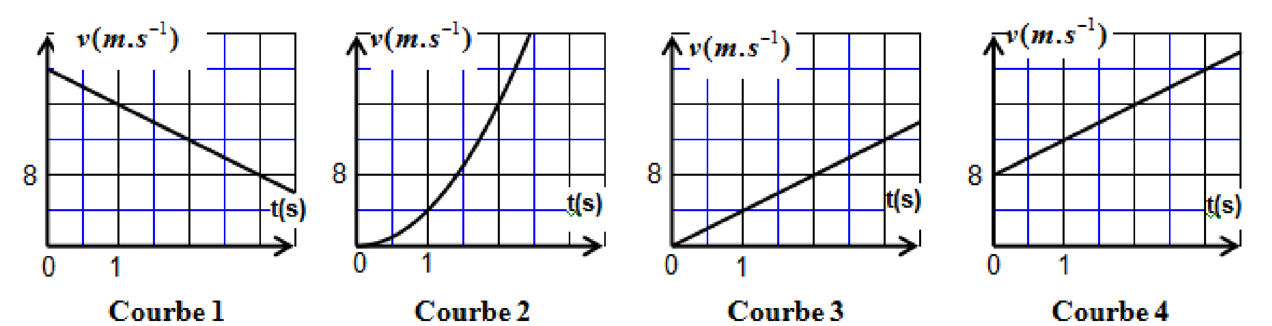


Figure 2

b. En déduire les valeurs de la vitesse initiale v_0, et de l'accélération a_G de G .

1.3. Calculer l'intensité de la force motrice $\vec{F}$.

2. Mouvement du système (S) durant la phase du saut

Le système (S) quitte la piste de course au passage de G par le point D avec une vitesse $\vec{v}_D$ formant un angle α avec le plan horizontal pour sauter à travers l'obstacle (E) (voir fig. (1)). Au cours du saut le système (S) n'est soumis qu'à son poids.

On étudie le mouvement de G dans le champ de pesanteur uniforme dans un repère orthonormé $(O.\vec{i}.\vec{j})$ lié à la terre considéré comme galiléen. On choisit l'instant de passage de G par le point D comme nouvelle origine des dates $t_0 = 0$, tel que : $y_0 = OD = h$.

2.1. En appliquant la deuxième loi de newton, montrer que les équations différentielles vérifiées par $x_G(t)$ et $y_G(t)$ coordonnées de G dans le repère $(O.\vec{i}.\vec{j})$ sont :

$$\frac{dx_G}{dt} = v_D.\cos\alpha \qquad ; \qquad \frac{dy_G}{dt} = -g.t + v_D.\sin\alpha$$

2.2. L'expression numérique des équations horaires $x_G(t)$ et $y_G(t)$ du mouvement de G est :

$$x_G(t) = 22{,}5.t \ (m) \qquad ; \qquad y_G(t) = -5.t^2 + 11.t + 5 \ (m)$$

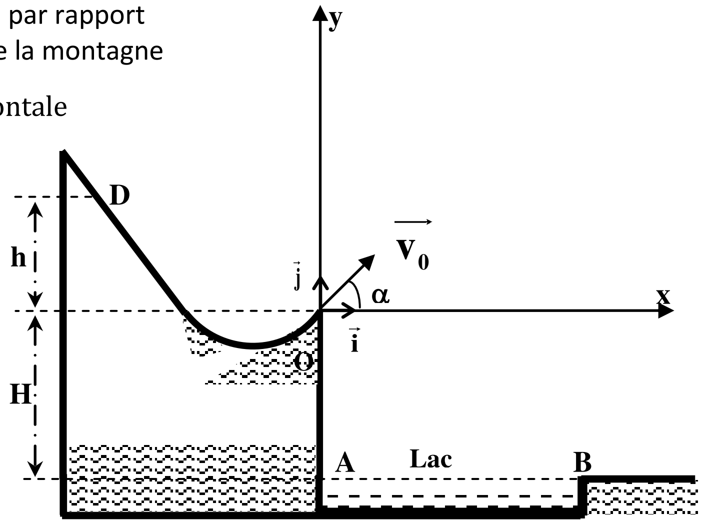
Déterminer les valeurs de la hauteur h, et de la vitesse v_D.

2.3. Le saut est réussi si la condition : $y_G > L + 0{,}6$ (m) est vérifiée. Est-ce que le saut du motard est réussi ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 3

Un skieur glisse sur une montagne recouverte de glace au pied de laquelle se trouve un lac d'eau . La figure suivante donne l'emplacement du lac d'eau par rapport au point O où le skieur sera obligé de quitter le sol de la montagne avec une vitesse $\vec{v}$ faisant un angle α avec l'horizontale e skieur part d'un point D situé à la hauteur h par rapport au plan horizontal contenant le point O, (voir figure) .La vitesse v du skieur lors de son passage au point O s'exprime par la relation $v = \sqrt{2g.h}$

Dans un essai le skieur passe par le point O origine du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec une certaine vitesse, alors il tombe dans le lac d'eau .



On veut déterminer la hauteur minimale h_m de la hauteur h du point D à partir duquel doit partir le skieur sans vitesse initiale pour qu'il ne tombe pas dans le lac .

Données :

- Masse du skieur et ses accessoires : m=60kg ;
- Accélération de la pesanteur : g =10 m.s^{-2} ;
- La hauteur : H= 0,50 m ;
- L'angle : α=30°

La longueur du lac d'eau : AB = d = 10m .

Pour cet exercice, on assimile le skieur et ses accessoires à un point matériel G et on néglige tous les frottements et toutes les actions de l'air.

1- Le skieur quitte le point O à l'instant t = 0 avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale

1.1- En appliquant la deuxième loi de Newton , déterminer l'équation différentielle que vérifie chacune des coordonnées du vecteur vitesse dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1.2- Montrer que l'équation de la trajectoire du skieur s'écrit dans le repère cartésien sous la forme :

$$y(x) = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^2.\cos^2\alpha} + x.\tan\alpha \ .$$

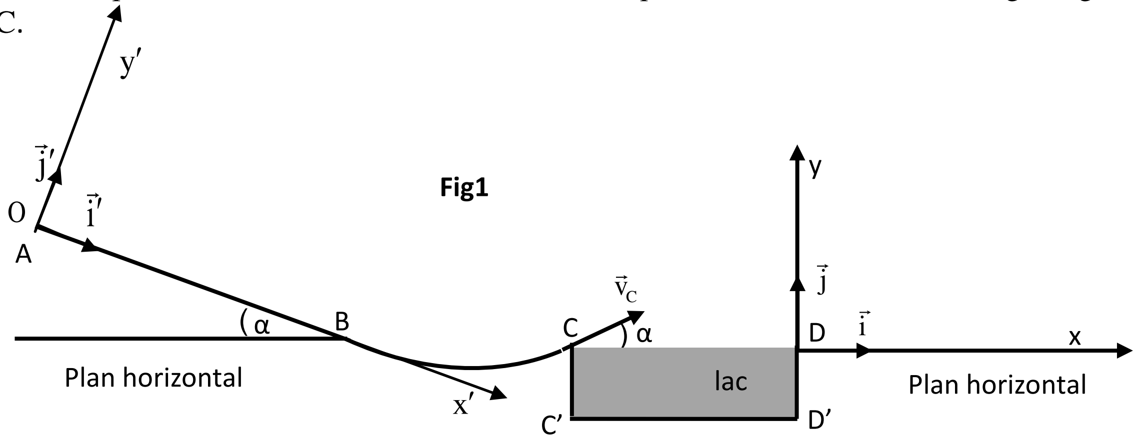
2- Déterminer la valeur minimale h_m de la hauteur h pour que le skieur ne tombe pas dans le lac d'eau .

EXERCICE 4

PREMIERE PARTIE (3points) : étude du mouvement d'un skieur

Un skieur veut s'exercer sur une piste modélisée par la figure 1.

Avant de faire un premier essai, le skieur étudie les forces qui s'exercent sur lui lors du glissage sur la piste ABC.



Données

- Intensité de pesanteur g = 9,8 m /s².
- AB est un plan incliné d'un angle $\alpha = 20^0$ par rapport au plan horizontal passant par le point B.
- La largeur du lac C'D'= L = 15m.

On modélise le skieur et ses accessoires par un solide (S) de masse m=80kg et de centre d'inertie G.

On considère sur la partie AB que les frottements ne sont pas négligeables et on les modélise par une force constante .

1. Etude des forces appliquées sur le skieur entre A et B

Le skieur part du point A d'abscisse $x'_A = 0$ dans le repère $(O,\vec{i}',\vec{j}')$ sans vitesse initiale à un instant que l'on considère comme origine des temps t=0s (Fig1). Le skieur glisse sur le plan incliné AB suivant la ligne de la plus grande pente avec une accélération constante **a** et passe par le point B avec une vitesse $V_B = 20\,m/s$.

1-1 En appliquant la deuxième loi de Newton, trouver en fonction de α , **a** et g l 'expression du coefficient de frottement $\tan\varphi$.Avec φ l'angle de frottement, défini par la normale à la trajectoire et la direction de la force appliquée par le plan incliné sur le skieur.

1-2 A l'instant $t_B = 10s$ le skieur passe par le point B ; Calculer la valeur de l'accélération **a** .En déduire la valeur du coefficient de frottement $\tan\varphi$.

1-3 Montrer que l'intensité de la force $\vec{R}$ exercée par le plan AB sur le skieur s'écrit sous la forme :

$R = mg.\cos\alpha.\sqrt{1+(\tan\varphi)^2}$; Calculer R.

2. L'étape du saut

A l'instant t=0 que l'on considère comme une nouvelle origine des temps, le skieur quitte la partie BC au point C avec une vitesse v_C dont le vecteur $\vec{v}_C$ forme l'angle $\alpha = 20°$ avec le plan horizontal.

Lors du saut , les équations horaires du mouvement de (S) dans le repère $(D,\vec{i},\vec{j})$ sont :

$$\begin{cases} x(t) = v_C.\cos\alpha.t - 15 \\ y(t) = -\dfrac{g}{2}.t^2 + v_C \sin\alpha.t \end{cases}$$

2-1 Déterminer dans le cas où $v_C = 16,27 m.s^{-1}$ les coordonnées du sommet de la trajectoire de (S).

2-2 Déterminer en fonction de g et α la condition que doit vérifier la vitesse v_C pour que le skieur ne tombe pas dans le lac.

En déduire la valeur minimale de cette vitesse .

EXERCICE 5

Dans cette partie, on étudie le mouvement de chute de deux corps (A) et (B) dans le repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen. Le point O est situé au niveau du sol (figure 1).

On néglige la poussée d'Archimède devant les autres forces et on prend l'intensité de la pesanteur : $g = 10\,m.s^{-2}$.

1-Etude de la chute d'un corps avec frottement :

A un instant choisi comme origine des dates($t=0$), on lâche, sans vitesse initiale d'un point H , un corps solide (A) de masse $m_A = 0,5\,kg$ et de centre d'inertie G_A (figure 1).

En plus de son poids, le solide (A) est soumis à une force de frottement fluide $\vec{f} = -k.\overrightarrow{v_A}$ où $\overrightarrow{v_A}$ est le vecteur vitesse de G_A à un instant t et k une constante positive ($k>0$).

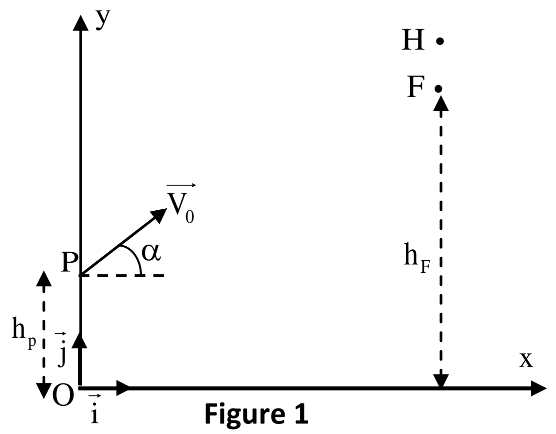


Figure 1

1-1- Montrer que l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la composante $v_{Ay}(t)$ selon l'axe (Oy) du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_A}(t)$ s'écrit :

$\dfrac{dv_{Ay}}{dt} + \dfrac{1}{\tau} v_{Ay} + g = 0$ où τ représente le temps caractéristique du mouvement .

1-2-La courbe de la figure 2 représente l'évolution de $v_{Ay}(t)$ au cours du temps.

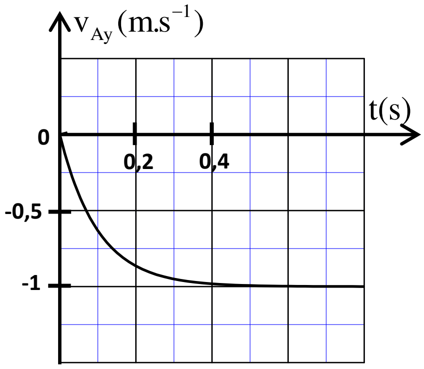


Figure 2

Déterminer τ et déduire la valeur de k .

1-3-Déterminer, en utilisant la méthode d'Euler, la vitesse $v_{Ay}(t_i)$ à un instant t_i sachant que l'accélération à l'instant t_{i-1} est $a_{Ay}(t_{i-1}) = -4,089\,m.s^{-2}$ et que le pas de calcul est $\Delta t = 0,01\,s$.

2-Etude du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur :

A l'instant où le centre d'inertie G_A du corps (A) passe par le point F d'altitude $h_F = 18,5\,m$ par rapport au sol, on lance un projectile (B), de masse m_B et de centre d'inertie G_B **,** d'un point P de coordonnées $(0, h_p)$ avec une vitesse initiale $\vec{V_0}$ faisant un angle α $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ avec l'horizontale(figure 1). On choisit cet instant comme nouvelle origine des dates ($t=0$) pour le mouvement de (A) et celui de (B).

On néglige les frottements pour le projectile (B) et on donne : $h_P = 1,8\,m$; $V_0 = 20\,m.s^{-1}$.

2-1-Etablir les équations horaires $x_B(t)$ et $y_B(t)$ du mouvement de (B) en fonction de α et t .

2-2-Exprimer les coordonnées du point S, sommet de la trajectoire de (B) , en fonction de α .

3-Les deux corps (A) et (B) se rencontrent au point S (on considère que G_A coïncide avec G_B en S). Déterminer l'angle α correspondant sachant que le corps (A) passe par F avec sa vitesse limite et que les mouvements de (A) et (B) s'effectuent dans le même plan (xOy) .

EXERCICE 6

Données :
AB = 2,4 m ; α = 20° ; g = 9,8 m.s^{-2} ; m = 70 kg .

1- Étude du mouvement sur la piste AB :

A l'instant t = 0 , le corps (S) part du point A sans vitesse initiale , et glisse sans frottement sur la piste AB (Figure 1) .
on étudie le mouvement de G dans le référentiel $\mathcal{R}_1(A, \vec{i_1}, \vec{j_1})$supposé galiléen .
En appliquant la deuxième loi de Newton , déterminer :

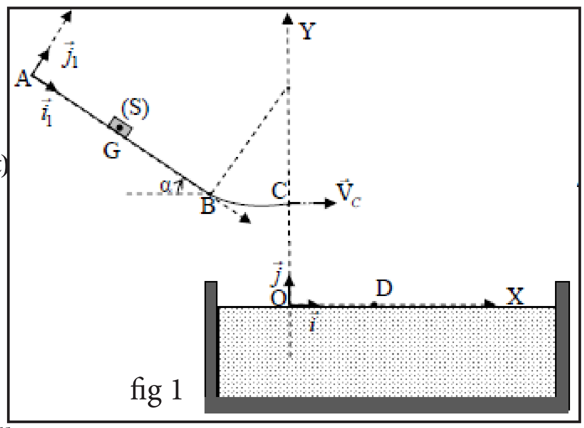


fig 1

1-1- Les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}_G$ dans le repère $\mathcal{R}_1(A, \vec{i_1}, \vec{j_1})$. **(0,5 pt)**
1-2- v_B la vitesse de G au point B . **(0,5 pt)**
1-3- R l'intensité de la force exercée par le plan AB sur le corps (S) . **(0,5 pt)**
On étudie dans le reste de l'exercice , le mouvement de G dans le référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$supposé galiléen (Figure 1) .

2- Étude du mouvement de G dans l'air :

Le corps (S) arrive au point C avec la vitesse $v_C = 4,67\,m.s^{-1}$, et il la quitte à un instant pris comme nouvelle origine des dates .
En plus de son poids , le corps (S) est soumis à l'action des vents artificiels , modélisée par une force horizontale constante d'expression : $\vec{f_1} = -f_1\,\vec{i}$
2-1- Trouver à un instant de date t , l'expression de v_x la composante horizontale du

vecteur vitesse en fonction de m , v_C , f_1 et t . **(0,5 pt)**
2-2- A l'instant t_D= 0,86 s , G arrive au point D situé à la surface de l'eau où la composante horizontale de sa vitesse s'annule .
a) Calculer f_1 . **(0,5 pt)**
b) Déterminer la hauteur h du point C par rapport à la surface de l'eau . **(1 pt)**

3- Étude du mouvement vertical du point G dans l'eau :
Le corps (S) poursuit son mouvement dans l'eau avec la vitesse verticale $\vec{V}$ où il est soumis en plus de son poids à :
- une force de frottement fluide modélisée par le vecteur $\vec{f}$ dont l'expression dans le système international des unités est : $\vec{f} = 140V^2.\vec{j}$.
- La poussée d'Archmède $\vec{F}_A$ d'intensité : $F_A = 637$ N .

On considère l'instant d'entrée du corps (S) dans l'eau comme nouvelle origine des dates .
3-1- Montrer que la vitesse V(t) du point G vérifie l'équation différentielle suivante : $\frac{dV(t)}{dt} - 2V^2 + 0,7 = 0$. **(1 pt)**
3-1- Trouver la valeur de la vitesse limite V_L . **(0,5 pt)**
3-3- En utilisant le tableau ci-dessous et la méthode d'Euler , déterminer les valeurs a_{i+1} et V_{i+2} . **(1 pt)**

t (s)	V(m.s^{-1})	a (m.s^{-2})
$t_i = 1,8.10^{-1}$	-1,90	6,52
$t_{i+1} = 1,95.10^{-1}$	-1,80	a_{i+1}
$t_{i+2} = 2,1.10^{-1}$	V_{i+2}	5,15

EXERCICE 7

Deux particules chargées Li^+ et X^{2+} sont introduites en un point O, avec la même vitesse initiale $\vec{V}$, dans un espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, perpendiculaire au vecteur $\vec{V}$.

q_X et m_X sont respectivement la charge électrique et la masse de la particule X^{2+} .

On considère que Li^+ et X^{2+} sont soumises seulement à la force de Lorentz. .

Données :
- La vitesse initiale : $V=10^5$ m.s^{-1} ;
- L'intensité du champ magnétique : $B=0,5T$;
- La charge élémentaire: $e=1,6.10^{-19}$ C ;
- La masse de Li^+ : $m_{Li} = 6,015u$;
- $1u=1,66.10^{-27}$ kg ;
- La figure 1 représente les trajectoires des deux particules dans le champ $\vec{B}$.

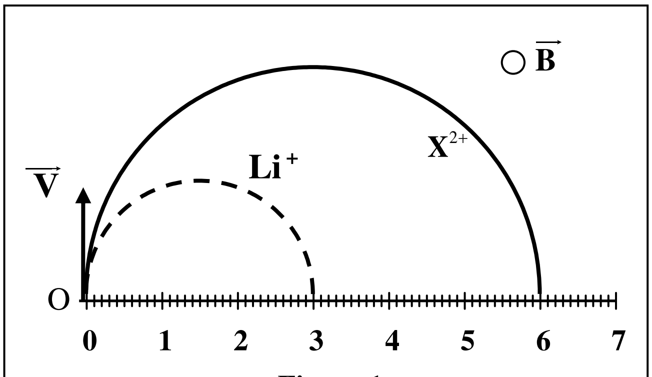


Figure 1

- on rappelle l'expression de la force de Lorentz : $\vec{F}=q\vec{V}\wedge\vec{B}$.

1. Déterminer la direction, le sens et l'intensité du vecteur force de Lorentz exercée sur la particule Li^+ au point O.

2. Préciser le sens du vecteur $\vec{B}$ en le représentant par ⊙ s'il est vers l'avant ou par ⊗ s'il est vers l'arrière.

3. En appliquant la deuxième loi de Newton dans un référentiel galiléen, montrer que le mouvement de l'ion Li^+ est uniforme et de trajectoire circulaire de rayon $R_{Li} = \frac{m_{Li}.V}{e.B}$.

4. En exploitant les données de la figure 1, déterminer le rapport $\frac{R_X}{R_{Li}}$; avec R_X le rayon de la trajectoire de la particule X^{2+} .

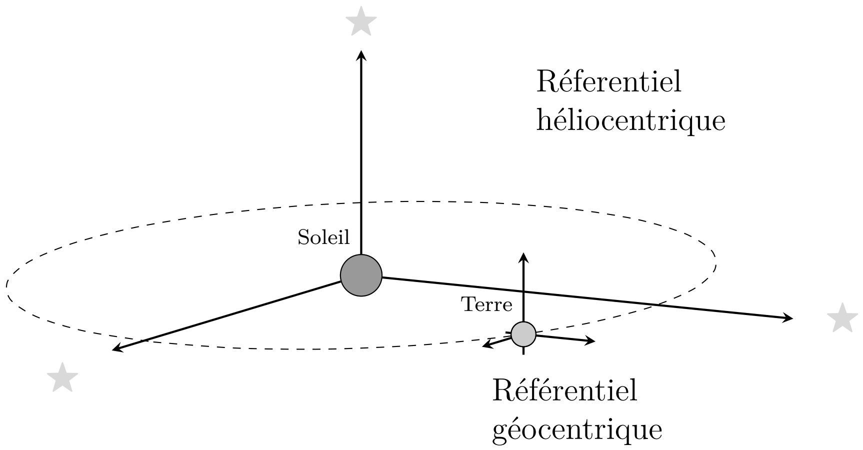
5. Sachant que la particule X^{2+} se trouve parmi les trois ions proposés avec leurs masses dans le tableau ci-dessous, identifier X^{2+} en justifiant la réponse.

Ion	$^{24}_{12}Mg^{2+}$	$^{26}_{12}Mg^{2+}$	$^{40}_{20}Ca^{2+}$
Masse (u)	23,985	25,983	39,952

Mouvement des satellites et des planètes :

Référentiel héliocentrique et géocentrique :

Le repère héliocentrique : Un repère dont l'origine est confondue avec le centre d'inertie du système solaire, c'est-à-dire le centre du soleil, ses trois axes sont dirigés vers 3 étoiles fixes. **Le repère géocentrique :** Un repère dont l'origine est confondue avec le centre d'inertie de la terre, ses trois axes dont deux sont dans le plan de l'équateur dirigés vers 2 étoiles fixes, et le troisième est dirigé vers l'étoile polaire.



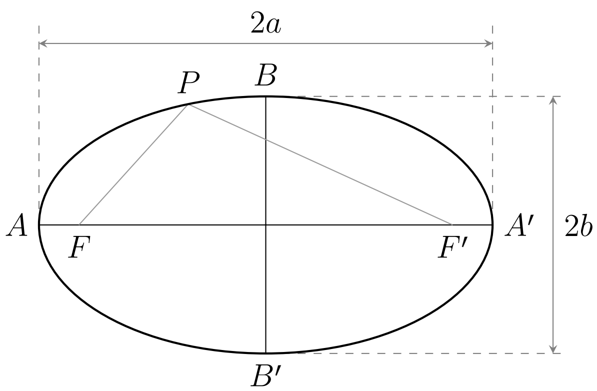
Le repère héliocentrique constitue avec le repère du temps le référentiel héliocentrique, il est utilisé pour décrire le mouvement des planètes du système solaire et sondes interplanétaires.
Le repère géocentrique constitue avec le repère temporel le référentiel géocentrique, il est utilisé pour décrire le mouvement des satellites autour de la terre, il est en mouvement autour de l'origine du repère héliocentrique, sa période est 365,25 jours.

Mouvements des planètes et des stallites :

L'ellipse mathématiquement :

Une ellipse de foyers F et F', et le lieu de l'ensemble des points P, tel que :

$$PF + PF' = 2a$$



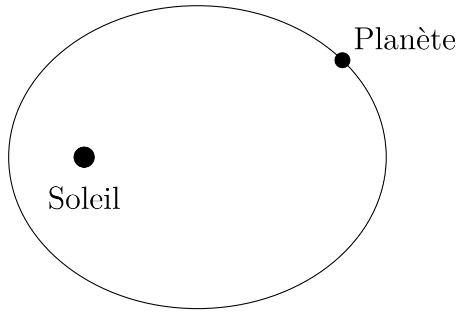
Le segment $[AA']$ représente le grand axe de l'ellipse il mesure $2a$, et le segment $[BB']$ représente le petit axe il mesure $2b$.
Le cercle est une ellipse dont les deux foyers sont confondus en un point appelé le centre, d'où :

$$a = r \qquad \text{et} \qquad AA' = BB' = 2r$$

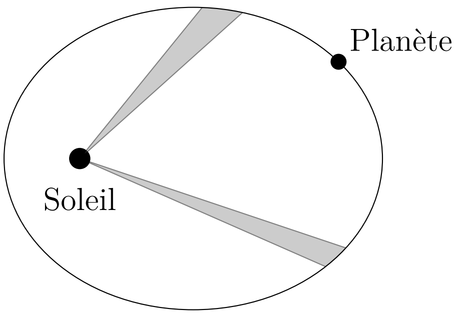
Les lois de Kepler :

Loi des orbites :

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire d'une planète est une ellipse dont le soleil est l'un de ses foyers.



Loi des aires :



Le segment de la droite reliant le soleil à une planète balaie des aires égales pendant des durées égales.
Les planètes se déplacent plus rapidement lorsqu'elles sont proches du soleil et plus lentement lorsqu'elles sont plus éloignés.

Loi des périodes :

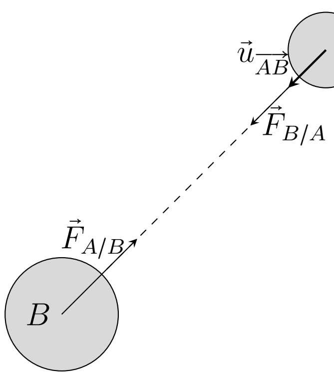
Pour toute planète du système solaire, le rapport entre le carré de la période de révolution et le cube du demi grand axe est constant :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{C}^{\text{te}}$$

Cette valeur dépend que du soleil, on remplace r par a lorsque la trajectoire est circulaire.

Étude du mouvement d'une planète et d'un satellite :

Rappel sur la loi d'attraction universelle :



Lorsqu'il y a une interaction entre deux corps A et B, le corps A exerce une force sur le corps B, on la note $\vec{F}_{A/B}$, et le corps B exerce une force de même intensité $\vec{F}_{B/A}$ ces deux vecteurs sont liés vectoriellement par la relation suivante :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -G\frac{m_A m_B}{d^2}\vec{u}_{\overrightarrow{AB}}$$

G est la constante de gravitation universelle elle vaut $6,67 \times 10^{-11}\text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$, et $d = AB$ la distance qui les sépare.

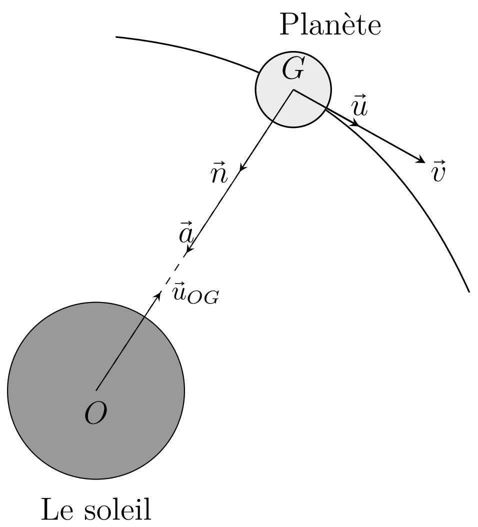
L'étude du mouvement d'une planète autour du soleil :

La planète de masse m_p, est soumise qu'à la force d'attraction appliquée par le soleil.
D'après la 2ème loi de Newton :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} = m\vec{a} &\Longleftrightarrow -G\frac{M_s m_p}{r^2}\vec{u}_{OG} = m_p\vec{a} \\ &\Longleftrightarrow G\frac{M_s m_p}{r^2}\vec{n} = m_p\vec{a}\end{aligned}$$

Donc :

$$\vec{a} = G\frac{M_s}{r^2}\vec{n}$$



Puisque le trajectoire est curviligne, alors d'après la relation de Frenet on aura :

$$\begin{aligned}\vec{a} = a_t\vec{u} + a_n\vec{n} &\Longleftrightarrow G\frac{M_s}{r^2}\vec{n} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u} + \frac{v^2}{r}\vec{n} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} & = 0 \\ \dfrac{v^2}{r} & = \dfrac{GM_s}{r^2}\end{cases}\end{aligned}$$

Puisque la dérivée par rapport au temps de la vitesse est nulle, alors v est constante.
On a :

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{r} &= \frac{GM_s}{r^2} \\ v &= \sqrt{\frac{GM_s}{r}}\end{aligned}$$

Par suite le mouvement est circulaire uniforme, sa période est :

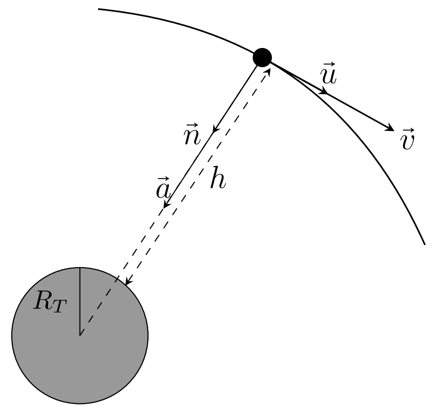
$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi r}{v} \\ &= \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_s}{r}}} \\ T^2 &= \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{GM_s}{r}} \\ \frac{T^2}{r^3} &= \frac{4\pi^2}{GM_s}\end{aligned}$$

D'où la constance du rapport T^2/r^3 d'après la loi de Kepler.

Mouvement d'un satellite en orbite :

La seule force appliquée sur le satellite de masse m_S et d'altitude h, est celle d'attraction :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{F}_{T/S} = G\frac{m_S M_T}{(R_T+h)^2}\vec{n}$$
$$m_S\vec{a} = G\frac{m_S M_T}{(R_T+h)^2}\vec{n}$$



D'où :

$$\vec{a} = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}\vec{n}$$

On sait d'après la relation de Frenet que :

$$\vec{a} = a_t\vec{u} + a_n\vec{n} \iff \vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u} + \frac{v^2}{r}\vec{n}$$
$$\iff \vec{a} = 0.\vec{u} + \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}\vec{n}$$

Par suite :

$$v = \mathrm{C^{te}} \qquad \text{et} \qquad v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}$$

Force d'attraction et le poids du satellite :

On considère que la force d'attraction appliquée sur le satellite égale aux poids de ce dernier :

$$\vec{P} = \vec{F} \iff \vec{g} = \vec{a}$$
$$\iff \vec{g} = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}\vec{n}$$

Donc l'intensité est :

$$g = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$$

Lorsque $h = 0$ on aura :

$$g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

En divisant les deux relations on obtient :

$$g = g_0\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$$

Or $a = g$ alors :

$$g = \frac{v^2}{R_T+h}$$

D'où :

$$v = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{2\pi(R_T+h)}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$$

Les satellites géostationnaires :

Un satellite géostationnaire est un satellite qui doit être fixe par rapport à la terre.
Afin d'obéir ceci, il faut vérifier les conditions suivantes :

Le plan d'orbite est dans le plan équatorial.

La période de révolution du satellite égale à la période propre de la terre $T = 86164$ s.

La trajectoire est un cercle décrit dans le même sens de rotation de la terre.

Pour vérifier la deuxième condition on peut utiliser :

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}} \\ \frac{T^2}{4\pi^2} &= \frac{(R_T+h)^3}{GM_T} \\ \frac{T^2GM_T}{4\pi^2} &= (R_T+h)^3 \\ \sqrt[3]{\frac{T^2GM_T}{4\pi^2}} - R_T &= h \end{aligned}$$

On obtient après l'application numérique $h \approx 36000$ Km.
Donc, un satellite pour qu'il soit immobile pour l'observateur (géostationnaire), doit évoluer sur une orbite circulaire, dans le plan équatorial, à l'altitude $h = 36000$ Km.

EXERCICE 1

Zarke AL Yamama , est un satellite marocain qui a pour fonction , de surveiller les frontières du royaume , de communiquer et de télédétection . Ce satellite a été réalisé par les experts du centre royal de télédétection spatial avec l'aide d'experts internationaux . Le satellite a été mis en orbite le 10 décembre 2001 à une altitude h de la surface de la Terre . Ce satellite (S) effectue environ 14 tours par jour autours de la Terre .

On suppose que la trajectoire de (S) est circulaire , et on étudie son mouvement dans le référentiel géocentrique .
On suppose que la Terre a une symétrie sphérique de répartition de masse .
On néglige les dimensions de (S) devant la distance qui le sépare du centre de la Terre .

Données :

La constante gravitationnelle : $G = 6{,}67.10^{-11}$ (SI) .
Rayon de la Terre : $r_T = 6350$ km .
Intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre : $g_o = 9{,}8\ m.s^{-2}$.
L'altitude h : h = 1000 km .
$\vec{u}_{TS}$: vecteur unitaire dirigé de O vers S .

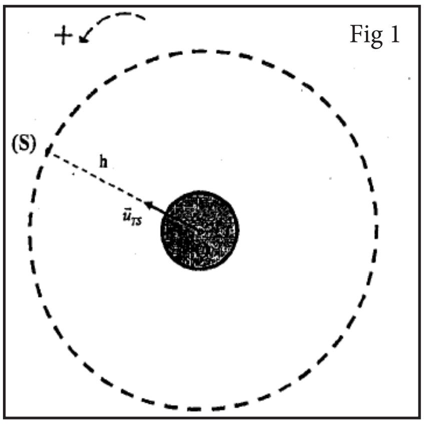
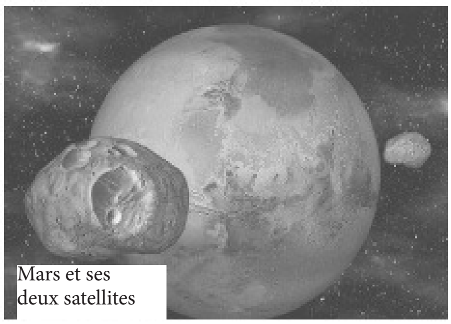


Fig 1

1- Recopier le schéma de la figure 1 et représenter dessus le vecteur vitesse $\vec{V}_S$ du satellite (S) et la force d'attraction universelle appliquée par la Terre sur (S) .
2- Donner l'expression vectorielle de la force exercée par la Terre sur (S) .
3- Écrire dans la base de frenet , l'expression du vecteur accélération du mouvement de (S) .
4- En appliquant la deuxième moi de Newton sur le centre d'inertie du satellite (S) :
4-1- Montrer que le mouvement de (S) est circulaire uniforme .
4-2- Écrire l'expression de V_S en fonction de g_o , r_T et h et calculer sa valeur .
5- Montrer que la masse de la Terre est $M_T \approx 6.10^{24}$ kg .
6- Montrer que le satellite (S) n'est pas fixe par rapport à un observateur terrestre .
7- Un satellite (S') tourne autours de la Terre à la vitesse angulaire ω et apparaît fixe par rapport à un observateur terrestre et envoie des photos utilisées en météorologie .
7-1- Démontrer la relation : $\omega^2.(r_T + z)^3 = Cte$; avec z la distance entre la surface de la Terre et le satellite .
7-2- Trouver la valeur de z .

EXERCICE 2

La planète Mars est l'une des planètes du système solaire qu'on peut détecter facilement dans le ciel à cause de sa luminosité et de sa couleur rouge . Il possède deux satellites naturels ; qui sont : Phobos et Deïmos .
Les savants se sont intéressé à son étude depuis longtemps , et on envoyé plusieurs sondes spatiales pour son exploration ce qui a permis d'avoir d'importantes informations sur lui .
Cet exercice propose la détermination de quelques grandeurs physiques concernant cette planète .


Mars et ses deux satellites

Données :

- Masse du Soleil : $M_S = 2.10^{30}$ kg .
- Rayon de Mars : $R_M = 6300$ km .
- La constante gravitationnelle : $G = 6{,}67.10^{-11}$ (SI) .
- La période de la rotation de Mars autours du Soleil : $T_M = 687$ jours ; 1 jour = 86400 s .
- Intensité de la pesanteur à la surface de la Terre : $g_o = 9{,}8\ N.0kg^{-1}$.

On considère que Mars et le Soleil ont une symétrie sphérique de répartition de la masse .

1- Détermination du rayon de la trajectoire de Mars et sa vitesse :

On considère que le mouvement de Mars dans le référentiel héliocentrique est circulaire , sa vitesse est V et son rayon est r (on néglige les dimensions de Mars devant les distances le séparant du centre du Soleil et on néglige aussi les autres forces exercées sur lui devant l'attraction universelle exercée par le Soleil) .

1-1- représenter sur un schéma la force exercée par le Soleil sur Mars .
1-2- Écrire en fonction de G , M_S, M_M et r,l'expression de l'intensité $F_{S/M}$ de la force d'attraction universelle exercée par le Soleil sur Mars . (M_M est la masse de Mars)
1-3- En appliquant la deuxième loi de newton , montrer que :

1-3-1- Le mouvement de Mars est circulaire uniforme .
1-3-2- La relation entre la période et le rayon est : $\frac{T_M^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$. et que la valeur de r est : $r \approx 2,3.10^{11}$ m .
1-4- Trouver la vitesse V .

2- Détermination de la masse de Mars et l'intensité de la pesanteur à sa surface :

On considère que le satellite Phobos est en mouvement circulaire uniforme autours de Mars à la distance z = 6000 km de sa surface .
La période de ce mouvement est T_P = 460 min (on néglige les dimensions de Phobos devant les autres dimensions) .
En étudiant le mouvement de Phobos dans un référentiel dont l'origine est confondue avec le centre de Mars , et qu'on suppose galiléen, trouver :
2-1- La masse M_M de Mars .
2-2- L'intensité de la pesanteur g_{oM} à la surface de Mars , et comparer la avec la valeur avec $g_{Mexp} = 3,8\ N.kg^{-1}$ mesurée à sa surface moyennant des appareils sophistiqués .

EXERCICE 3

Jupiter est la plus grande planète parmi les planètes du système solaire , et à lui seul , il représente un petit monde parmi ce système puisqu'il y a soixante six satellites qui tournent autours de lui .
Cet exercice a pour objectif l'étude du mouvement de Jupiter autours du soleil et la détermination de quelques grandeurs physique qui le caractérisent

Données :
- Masse du Soleil : $M_S = 2.10^{30}$ kg .
- La constante gravitationnelle : $G = 6,67.10^{-11}$ (SI) .
- La période de la rotation de Jupiter autours du Soleil : $T_J = 3,74.10^8$ s .

On considère que le soleil et Jupiter ont une symétrie sphérique de répartition de la masse et M_J le symbole de la masse de Jupiter .
On néglige les dimensions de Jupiter devant la distance séparant son centre et celui du Soleil , et on néglige toutes les autres forces exercées sur lui devant la force d'attraction universelle entre lui et le Soleil .

1- Détermination du rayon de la trajectoire de Jupiter et sa vitesse

On considère que le mouvement de la planète Jupiter dans le référentiel héliocentrique est circulaire et le rayon de sa trajectoire est r .
1-1- Écrire l'expression de la force d'attraction universelle en fonction M_J , M_S , G et r .
1-2- En appliquant la deuxième loi de Newton :
1-2-1- Écrire les expressions des coordonnées du vecteur accélération dans la base de Frénet , et en déduire que le mouvement de Jupitère est circulaire uniforme .
1-2-2- Montrer que la troisième de Kepler s'écrit comme suit : $\frac{T_J^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$.
1-3- Vérifier que $r \approx 7,8.10^{11}$ m .
1-4- Trouver la vitesse V de Jupiter au cours de sa rotation autours du Soleil .

2- Détermination de la masse de Jupiter

On considère que Io est l'un des satellites de Jupiter , découvert par Galilée , et qui est en mouvement circulaire uniforme de rayon $r' = 4,8.10^8$ m et de période T_{Io} = 1,77 jours autours du centre de Jupiter .
On néglige les dimensions de Io devant les autres dimensions , et on néglige toutes les autres forces exercées sur lui devant la force d'attraction universelle entre lui et Jupiter .
En étudiant le mouvement du satellite Io , dans un référentiel dont l'origine est confondu avec le centre de Jupiter et considéré galiléen , déterminer la masse M_J de Jupiter .

EXERCICE 4

Une « exoplanète « est une planète qui tourne autour d'une étoile autre que le soleil. Ces dernières années, les astronomes ont découvert quelques milliers d'exoplanètes en utilisant des instruments scientifiques sophistiqués. «Mu Arae» est une étoile qui est loin de notre système solaire de 50 années-lumière, quatre exoplanètes gravitent autour d'elle selon des trajectoires supposées circulaires. On symbolise cette étoile par la lettre S.
On se propose dans cet exercice de déterminer la masse de l'étoile «Mu Arae» par application de la deuxième loi de Newton et les lois de Kepler sur l'une des exoplanètes symbolisée par la lettre b.

On considère que S a une distribution sphérique de masse et que l'exoplanète b a des dimensions négligeables devant les distances la séparant de son étoile S.
On néglige l'action des autres exoplanètes sur l'exoplanète b .
La seule force à prendre en considération est la force de gravitation universelle entre l'exoplanète b et l'étoile S.
On étudie le mouvement de b dans un référentiel supposé galiléen, lié au centre de S.

Données :
- La constante de gravitation universelle :$G = 6,67.10^{-11}$ (S.I) ;
- Le rayon de la trajectoire de b autour de S : $r_b = 2,24.10^{11}$ m ;
- la période de révolution de b autour de l'étoile S : $T_b = 5,56.10^7$ s .

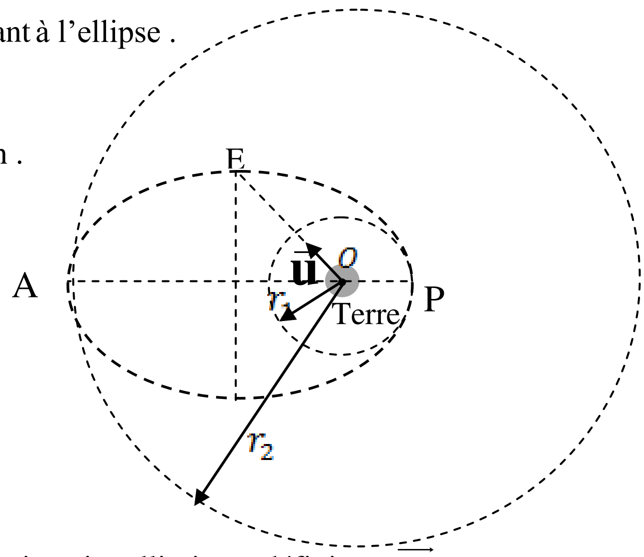
1- Écrire l'expression de l'intensité $F_{S/b}$ de la force de gravitation universelle, exercée par l'étoile S, de masse M_S , sur l'exoplanète b, de masse m_b .
2- En appliquant la deuxième loi de Newton :
2-1- Montrer que le mouvement circulaire de l'exoplanète b autour de son étoile S, est uniforme.
2-2- Établir la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{r^3} = K$. K étant une constante.
2-3- Déterminer la masse M_S de l'étoile S.

EXERCICE 5

Le transfert d'un satellite artificiel terrestre (S) sur une orbite circulaire basse de rayon r_1 vere une orbite circulaire haute de rayon r_2 se fait en passant par une orbite elliptique tangente aux deux orbites circulaires comme l'indique la figure 3 . Le centre O de la Terre constitue l'un des foyers de la trajectoire elliptique .

Données : $r_1 = 6700\ km$; $r_2 = 42200\ km$; constante de gravitation universelle $G = 6,67.10^{-11} S.I$
Masse de la Terre $M_T = 6,0.10^{24}$ kg **;** On rappelle la propriété de l'ellipse de foyer O et O' et de demi-

grand axe a : $OM + O'M = 2a$ avec M un point appartenant à l'ellipse .



On suppose que le satellite artificiel (S) est ponctuel et n'est soumis qu'à l'attraction de la Terre et que la Terre effectue un tour complet autour de son axe de rotation en 24h .

On étudie le mouvement de (S) dans le repère géocentrique .

1. En utilisant l'équation aux dimensions , déterminer la dimension de la constante G.

2- On note T_1 et T_2 les périodes respectives de (S) sur l'orbite circulaire basse et l'orbite circulaire haute .

Exprimer T_1 en fonction de r_1 , r_2 et T_2 . Calculer la valeur de T_1 sachant (S) est géostationnaire sur l'orbite circulaire haute.

3- On considère le point E qui appartient au petit axe de la trajectoire elliptique défini par $\overrightarrow{OE} = OE.u$ et $\|\vec{u}\| = 1$.Donner l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_S$ de (S) au point E en fonction de G ,M et OE .

Calculer $\|\vec{a}_s\|$ au point E .

EXERCICE 6

Le satellite HOTBIRD apparait immobile pour un observateur fixe sur la surface de la terre . Ce satellite est utilisé pour les télécommunications et les émissions radio et télévisées.

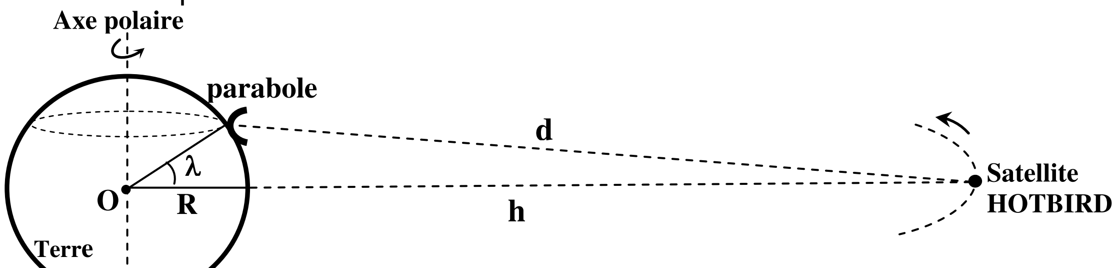


Figure1

Données :

- Masse de la Terre : $M_T = 5,98.10^{24}$ kg ;- Rayon de la Terre : R = 6400 km ;
- Constante d'attraction gravitationnelle : G = $6,67.10^{-11}$ (S.I) ;
- On suppose que la Terre est une sphère à répartition massique symétrique ;
- La Terre effectue un tour complet autour de se son axe polaire en T=23h56min4s ;
- La hauteur de l'orbite du satellite HOTBIRD par rapport à la surface de la terre est h = 36000 km .

1- La parabole et la réception des ondes électromagnétiques

Une parabole est fixée sur le toit d'une maison qui se trouve à la latitude λ=33,5° .

1.1- Calculer dans le référentiel géocentrique la vitesse v_p de la parabole concave supposée ponctuelle .

1.2- Justifier pourquoi il n'est pas nécessaire que la parabole soit munie d'un système rotatoire qui permet de suivre le mouvement du satellite HOTBIRD .

2- Etude du mouvement du satellite HOTBIRD

On assimile le satellite HOTBIRD à un point matériel de masse m_s .

2.1- En appliquant la deuxième loi de Newton , établir l'expression de la vitesse v_s du satellite HOTBIRD sur son orbite en fonction de G , M , R et h . calculer v_s .

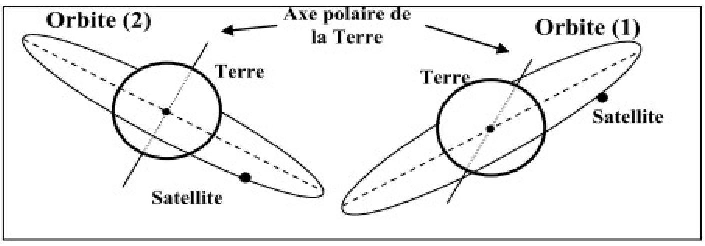
2.2- On considère deux orbites hypothétiques (1) et (2) d'un satellite en mouvement circulaire uniforme comme l'indique la figure(2) .

Choisir la réponse juste en justifiant votre choix :

L'orbite qui correspond au satellite HOTBIRD est :

a) L'orbite (1) .

b) L'orbite (2) .



Mohamed El Founani
Lycée Ibn Maja

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe :

Rappel sur le mouvement de rotation :

Dans les deux années précédentes, vous avez étudié deux cours importants *Mouvement de rotation autour d'un axe fixe* en 1ère année, et *Équilibre d'un solide en rotation autour d'un axe fixe*, on rappelle les points principaux dans ce paragraphe :

Définition :

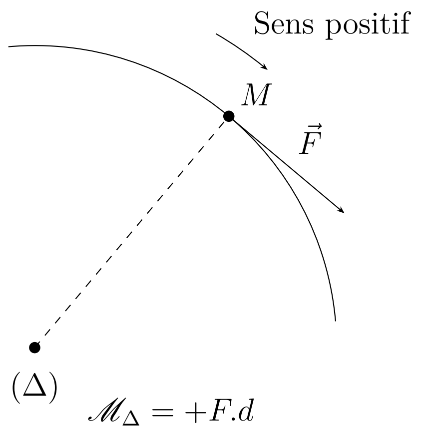
Un solide indéformable est en rotation autour d'un axe fixe si tous ses points décrivent des trajectoires circulaires centrés sur cet axe, ils ont la même vitesse angulaire, sauf les points situés sur l'axe.

Moment d'une force :

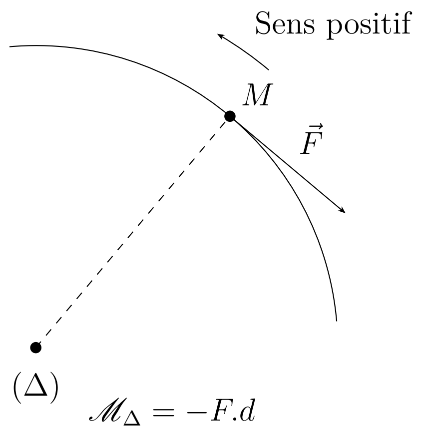
Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe fixe (Δ), est le produit de l'intensité de cette force par la distance qui sépare la droite d'action de la force et l'axe de rotation.

$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm F.d$$

Le signe dépend du sens de rotation, si la force tourne le solide dans le sens positif alors le signe est positif, sinon le signe du $\mathscr{M}_\Delta$ est négatif.
Son unité est N.m .



$\mathscr{M}_\Delta = +F.d$



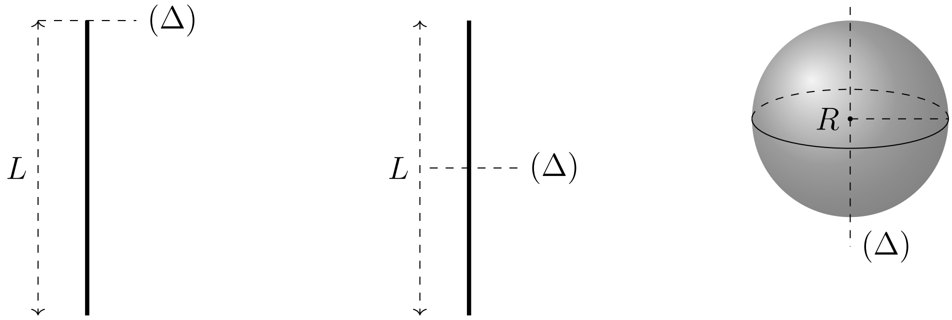
$\mathscr{M}_\Delta = -F.d$

Physiquement, c'est la grandeur qui traduit l'aptitude de cette force de faire tourner un système mécanique autour d'un axe.

Moment d'inertie :

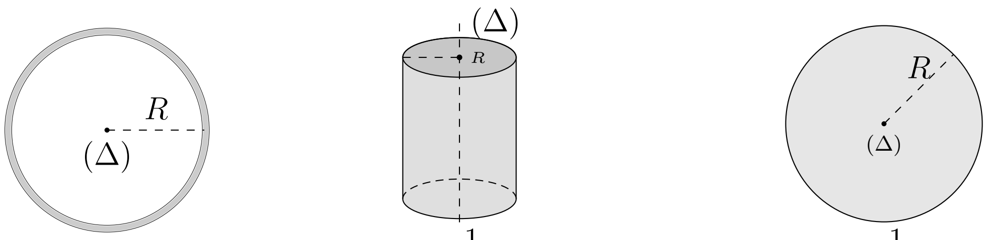
Le moment d'inertie d'un corps est l'analogue de la masse m, c'est une quantité physique caractérisant chaque corps, elle dépend de la masse, la longueur, la forme...
Son unité est $\mathrm{Kg/m^2}$

Tige | Tige | Sphère



$J_\Delta = \frac{1}{3}mL^2$ | $J_\Delta = \frac{1}{12}mL^2$ | $J_\Delta = \frac{2}{5}mr^2$

Anneau | Cylindre | Disque



$J_\Delta = mr^2$ | $J_\Delta = \frac{1}{2}mr^2$ | $J_\Delta = \frac{1}{2}mr^2$

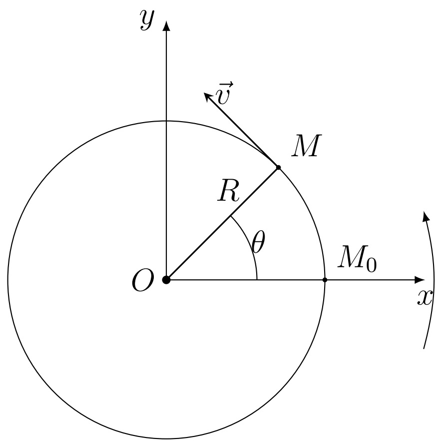
De l'abscisse angulaire à l'accélération angulaire :

L'abscisse angulaire :

On peut repérer la position du point appartenant à un solide par l'angle θ formé d'un vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ avec un axe une direction référentielle, le plus souvent l'axe $\overrightarrow{Ox}$, l'angle est donc $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{Ox};\overrightarrow{OM}}\right)$, son unité est (rad).

Sa relation avec l'abscisse curviligne s est :

$$s = \widehat{OM} = R.\theta$$



La vitesse angulaire :

On définit la vitesse angulaire comme la dérivée de l'abscisse angulaire par rapport au temps :

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

Son unité rad.s^{-1} . La relation entre la vitesse angulaire et la vitesse linéaire est :

$$\dot{\theta} = \frac{v}{R}$$

Car :

$$\begin{aligned} S = R\theta &\Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R.\theta) \\ &\Longleftrightarrow v = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ &\Longleftrightarrow v = R\omega \end{aligned}$$

L'accélération angulaire :

On définit l'accélération angulaire comme la dérivée de la vitesse par rapport au temps :

$$\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

Son unité est rad/s^2. D'après la relation de Frenet on a :

$$\vec{a} = a_t\vec{u} + a_n\vec{n}$$

On a :

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}R\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} \\ &= R\ddot{\theta} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} a_n &= \frac{v^2}{R} \\ &= \frac{R^2\dot{\theta}^2}{R} \\ &= R\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$a_n = R\dot{\theta}^2 \qquad \text{et} \qquad a_t = R\ddot{\theta}$$

Mouvement de rotation :

Mouvement de rotation uniforme :

Le mouvement de rotation uniforme est un mouvement dans lequel l'accélération angulaire est nulle, et la vitesse est constante, son équation horaire :

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

Où θ_0 est l'abscisse angulaire à l'origine des dates.

Mouvement de rotation uniformément varié :

Le mouvement de rotation varié est un mouvement dans lequel l'accélération est constante, son équation horaire est :

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

$\dot{\theta}_0$ est la vitesse angulaire à l'origine des dates. L'équation de la vitesse angulaire est :

$$\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$$

De cette équation on peut déduire que : $t = \dfrac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\ddot{\theta}}$

En remplaçant dans l'équation horaire :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2}\ddot{\theta}\left(\frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\ddot{\theta}}\right)^2 + \dot{\theta}_0\left(\frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\ddot{\theta}}\right) + \theta_0 \\ \theta - \theta_0 &= \frac{1}{2}\ddot{\theta}\left(\frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\ddot{\theta}}\right)^2 + \frac{2\dot{\theta}_0}{2}\frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\ddot{\theta}} \\ 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_0) &= (\dot{\theta} - \dot{\theta}_0)^2 + 2\dot{\theta}_0(\dot{\theta} - \dot{\theta}_0) \\ &= \dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}_0\dot{\theta} + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}_0\dot{\theta} - 2\dot{\theta}_0^2 \\ 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_0) &= \dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 \end{aligned}$$

C'est la relation caractéristique du mouvement de rotation uniformément varié.

Le principe fondamental de la dynamique :

La somme des moments des forces extérieures qui s'exercent sur un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ) est égale au produit du moment d'inertie du solide et son accélération angulaire :

$$\sum \mathscr{M}_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

Remarques :
Si $\ddot{\theta} = 0$, alors le mouvement de rotation est uniforme autour de l'axe fixe (Δ), est le système étudié est en équilibre.
Si $\ddot{\theta} = \mathrm{C^{te}}$, alors le mouvement de rotation est uniformément varié autour de l'axe fixe (Δ).

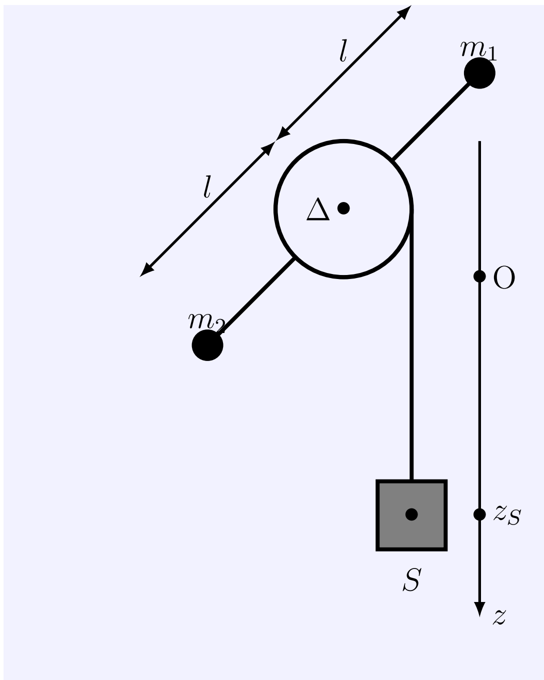
Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe : Exercices

Exercice d'application 1 :

1. La vitesse angulaire du point M d'un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe est $\dot{\theta} = 10rad/s$;
   (a) Calculer l'accélération angulaire du point M ;
   (b) Quelle est la nature du mouvement du point M ?
   (c) Écrire l'expression de l'abscisse angulaire du point M en fonction du temps , sachant que son abscisse angulaire à l'origine des dates est $\theta_0 = 2rad$
2. L'expression de l'abscisse angulaire du point N d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est :
   $$\theta(t) = 10t^2 + 40t + 6$$
   t est en (s) et θ en rad .
   (a) Déterminer l'expression de la vitesse angulaire du point N en fonction du temps
   (b) Déterminer l'expression de l'accélération angulaire du point N en fonction du temps
   (c) Quelle est la nature du mouvement du point N .

Exercice 1

On considère un cylindre (C) homogène de masse $M = 1kg$ et de rayon $r = 10cm$ pouvant tourner autour d'un axe fixe Δ , horizontal en passant par son centre d'inertie (G) . Une tige (T) de masse négligeable, fixée au cylindre en passant par G , à ces deux extrémités on fixe deux corps ponctuels de même masse $m_1 = m_2 = 0,5kg$ leurs centres de gravité se trouvent à une distance $l = 50cm$ de l'axe de rotation (Δ).
En enroule sur le cylindre un fil inextensible , de masse négligeable et on fixe l'autre extrémité du fil à un solide (S) de masse $m = 10kg$. Le fil ne glisse pas sur le cylindre . On lâche le système sans vitesse initiale à la date $t = 0$. on néglige toute sorte de frottement pendant le mouvement du système .



1. Donner la signification physique des condition suivantes :
   * un fil inextensible , Le fil ne glisse pas sur le cylindre
2. Déterminer l'accélération $a = \dfrac{d^2z}{dt^2}$ du solide (S) et la tension du fil au cours du mouvement du système . L'axe Oz est orienté vers le bas .

3. Quelle est la vitesse angulaire du cylindre lorsque le solide parcourt une altitude $h = 5m$

On donne $g = 10m/s^2$

Exercice 2

On considère un disque , de masse $m = 200g$, de rayon $r = 5cm$, susceptible de tourner autour d'un axe (Δ). On applique au disque immobile un couple de forces de moment $\mathscr{M}$ constant , le disque effectue alors un mouvement de rotation autour de l'axe (Δ). Au bout d'une minute la vitesse angulaire du disque a la valeur de $\dot{\theta} = 5rad/s$, à cet instant on supprime l'action du couple de forces . Les frottements sont supposés négligeables

1. Calculer la valeur du moment d'inertie du disque par rapport à l'axe (Δ)
2. Montrer que l'accélération angulaire du disque est constante au cours de l'application du couple de moteur . Calculer sa valeur
3. En déduire la valeur du moment $\mathscr{M}$ du couple moteur
4. Quelle est la nature du mouvement du disque après avoir supprimé l'action du couple moteur ? Justifier la réponse .

Exercice 3

Un anneau de moment d'inertie J_Δ tourne autour de son axe (Δ) à raison de 90 tours par minute .

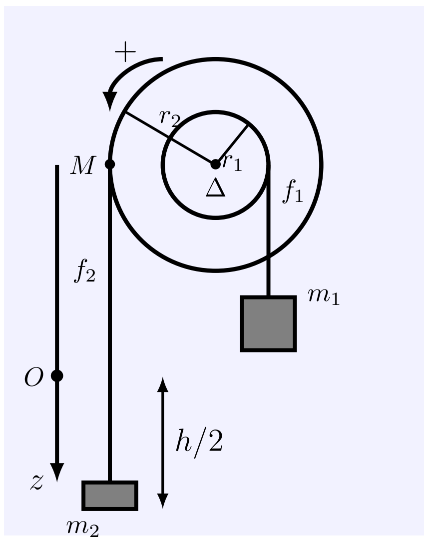
Pour freiner cet anneau , on exerce sur lui un couple de forces de moment $\mathscr{M}_C$ constant jusqu' à son arrêt. $\mathscr{M}_{\mathscr{C}} = -0,2N/m$. On néglige les frottements .

1. Quelle est la nature du mouvement de l'anneau pendant l'application du couple résistant ? Justifier la réponse .
2. Calculer la valeur de l'accélération angulaire de l'anneau pendant l'action du couple de freinage sachant que $J_\Delta = 8 \times 10^{-3} kg.m^2$.
3. Calculer la durée de freinage .

Exercice 4

Un système (S) est constitué de deux cylindres homogènes (D) et (D') de même substance , de même épaisseur, coaxiaux, solidaires l'un de l'autre. Le moment d'inertie de (S) par rapport à son axe de révolution est $J_\Delta = 1,7 \times 10^{-1} kg.m^2$.

On enroule sur chaque cylindre un fil inextensible de masse négligeable . Soit f_1 le fil enroulé sur D_1 de rayon r_1 à son extrémité on suspend un corps de masse $m_1 = 3kg$ et soit f_2 le fil enroulé sur le cylindre D_2 de rayon $r_2 = 2r_1 = 40cm$, à son extrémité on suspend un corps de masse $m_2 = 2kg$.



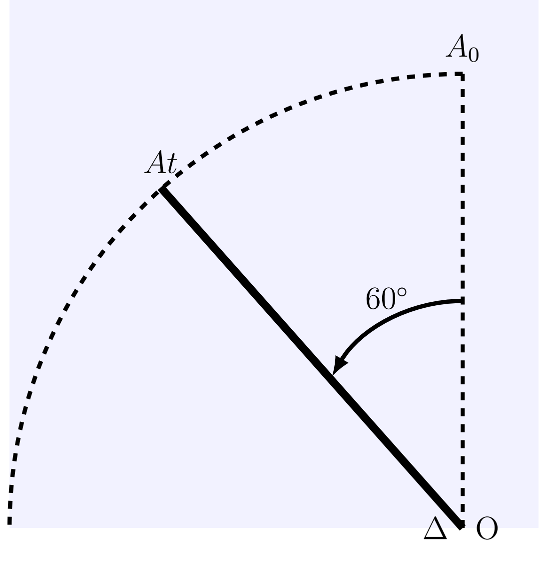
On libère le système sans vitesse initiale .

1. Montrer que le système est en mouvement dans le sens indiqué sur la figure ci-contre .
2. En réalisant une étude dynamique montrer que l'équation différentielle vérifiée par $\ddot{\theta} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ peut s'écrire sous la forme suivante :
$$\ddot{\theta} = \frac{r_1.g(2m_2 - m_1)}{J_\Delta + r_1^2(4m_2 + m_1)}$$
3. En déduire les valeurs de l'accélération linéaire a_1 de corps de masse m_1 et a_2 de corps de masse m_2
4. Calculer les deux tensions T_1 de f_1 et T_2 de f_2.
5. À l'instant $t = 0$ les deux corps se trouve de la même hauteur du plan horizontal (h=0.5m) et que le centre d'inertie du corps m_2 soit confondu avec l'origine de l'axe Oz qui est orienté vers le bas .
On considère le point M contact entre le fil f_2 et D_2 voir figure .Trouver les caractéristiques du vecteur accélération $\overrightarrow{a_M}$ en ce point M à un instant t où le corps m_2 descend de $\dfrac{h}{2}$.
On donne $g = 10m/s^2$

Exercice 5

Un plaque homogène OA , de masse $M = 2kg$ et de longueur $l = 50cm$, peut tourner dans un plan vertical , autour d'un axe fixe (Δ) passant par son extrémité O .
On lâche la plaque de sa position d'équilibre verticale instable où $\theta = 0°$ ' l'abscisse angulaire à l'instant t=0 , sans vitesse initiale . On donne le moment d'inertie de la plaque par rapport à (Δ) est : $J_\Delta = \dfrac{1}{3}Ml^2$ et l'intensité de pesanteur $g = 9,81m/s^2$.

1. Déterminer l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ à un instant t où $\theta = 60°$ avec la verticale .
2. Calculer la norme de l'accélération tangentielle a_T et la norme de l'accélération normale a_N de l'extrémité libre A de la plaque à cet instant .
3. En déduire la norme est la direction de l'accélération linéaire $\overrightarrow{a}$ de cette extrémité .



Les systèmes oscillants :

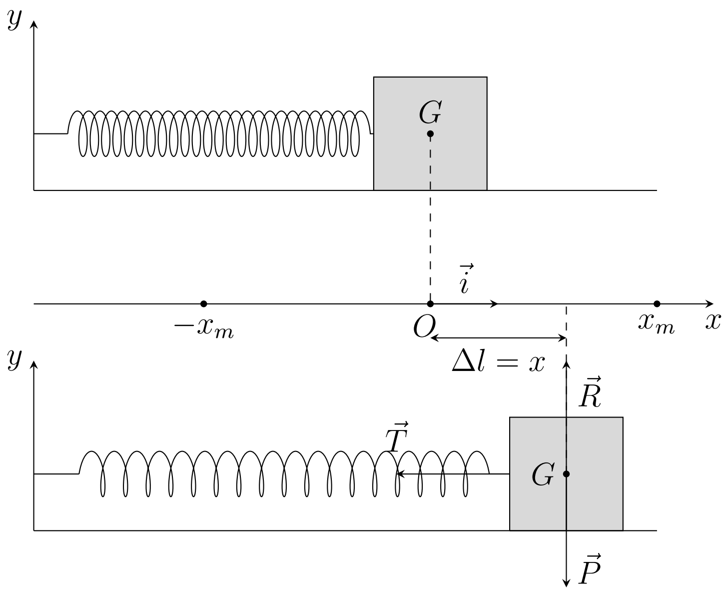
Un système oscillant, est tout simplement un corps ou plusieurs corps, effectuent un mouvement d'aller-retour autour de son position d'équilibre.
Lors de cette étude, on remarquera une analogie entre les systèmes oscillants (le pendule élastique, de torsion, pesant...) et les circuits (LC, RLC...). On parle des oscillateurs harmoniques.

Pendule élastique :

Pendule élastique horizontal :

Étude dynamique :

Sur un plan lisse on attache à l'extrémité d'un ressort de spires non jointives et de masse négligeable, un corps (S) de masse m, on l'écarte de sa position d'équilibre, et on le lâche sans vitesse initiale, le solide effectue donc un mouvement rectiligne oscillatoire.



Étudions ce système dynamiquement :
Le système étudié : $\{(S)\}$
Bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P}: & \text{Le poids du corps} \\ \vec{R}: & \text{La réaction du plan} \\ \vec{T}: & \text{La tension du ressort} \end{cases}$$

Dans le référentiel terrestre supposée galiléen on associe le repère (Ox), On applique la deuxième loi de Newton :

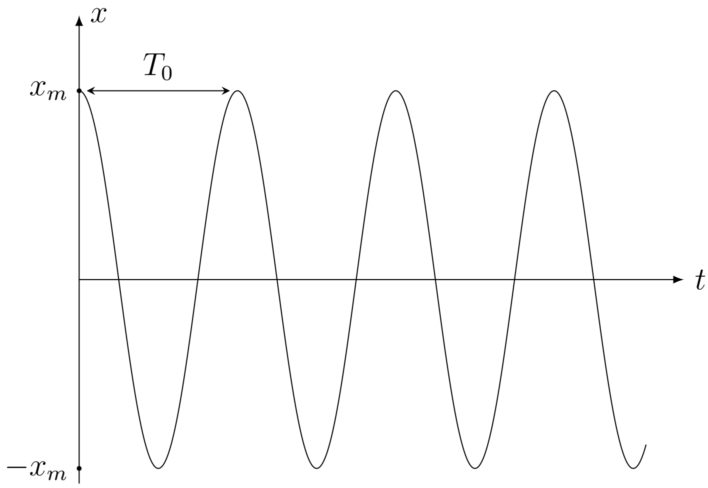
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$
$$-kx = m\ddot{x}$$
$$\frac{k}{m}x + \ddot{x} = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du seconde ordre, sa solution s'écrit sous forme :

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Où :

$$\begin{cases} x_m & \text{Amplitude maximale en (m)} \\ T_0 & \text{La période propre des oscillations (s)} \\ \varphi & \text{Phase à l'origine des dates en (rad)} \end{cases}$$



En dérivant x on trouve l'expression du $\dot{x} = v$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right)$$
$$\dot{x} = -x_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

On pose $x_m\dfrac{2\pi}{T_0} = \dot{x}_m$, on obtient :

$$\dot{x} = -\dot{x}_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Et en dérivant cette dernière on trouve l'équation de l'accélération :

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\dot{x}_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right)$$
$$\ddot{x} = -\frac{2\pi}{T_0}\dot{x}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

On pose : $\dfrac{2\pi}{T_0}\dot{x}_m = \ddot{x}_m$, on obtient donc :

$$\ddot{x} = -\ddot{x}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

La période T_0 et la fréquence f_0 :
On a :

$$\ddot{x} = -\ddot{x}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$
$$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$
$$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x$$

C'est l'équation caractéristique du mouvement rectiligne oscillatoire.
On sait d'après l'équation différentielle que :

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\frac{k}{m} &= \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \\ T_0^2 &= (2\pi)^2\frac{m}{k} \\ T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\end{aligned}$$

C'est la période propre du pendule élastique en oscillations libres non amorties. La fréquence est donc :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

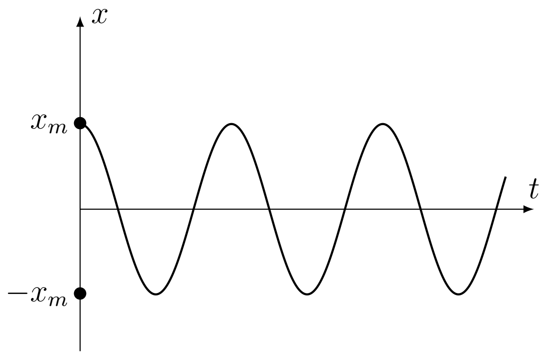
Remarque : Si n est le nombre des oscillations effectuées par l'oscillateur (le pendule) pendant la durée Δt, alors :

$$T_0 = \frac{\Delta t}{n}$$

Détermination de φ :
Afin de déterminer la phase à l'origine des dates, on utilise les conditions initiales, soit la fonction suivante :

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

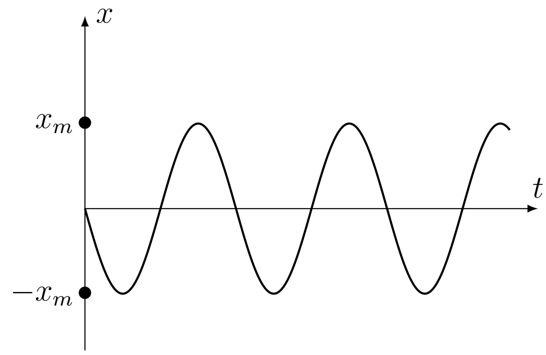
On a trois cas possibles, selon la représentation graphique de x en fonction du temps :
Cas 1 :
Si la représentation graphique est :



À $t = 0$ on a $x = x_m$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}x_m &= x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times 0 + \varphi\right) \\ &= x_m \cos(\varphi) \\ 1 &= \cos(\varphi)\end{aligned}$$

La solution est $\varphi = 0$.
Cas 2 :
Si la représentation graphique est :



À $t = 0$ on a $x = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 0 &= x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times 0 + \varphi\right) \\ &= x_m \cos\left(\varphi\right) \\ 0 &= \cos(\varphi) \end{aligned}$$

La solution est $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$. Dérivons x et trouvons la réponse correcte :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right) \\ &= -x_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \end{aligned}$$

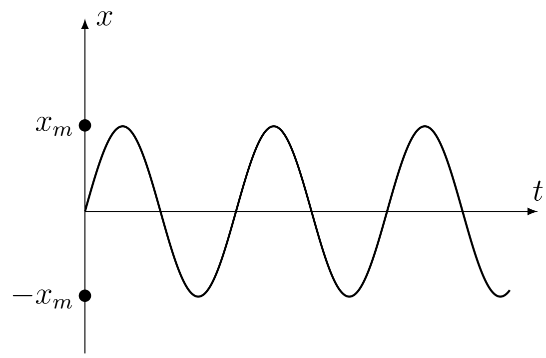
À $t = 0$ on a :

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = -x_m \frac{2\pi}{T_0} \sin(\varphi)$$

Or cette expression doit être négative alors : $\sin(\varphi) > 0 \Longrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Cas 3 :

Si la représentation graphique est :



À $t = 0$ on a $x = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 0 &= x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times 0 + \varphi\right) \\ &= x_m \cos\left(\varphi\right) \\ 0 &= \cos(\varphi) \end{aligned}$$

La solution est $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$. Dérivons x et trouvons la réponse correcte :

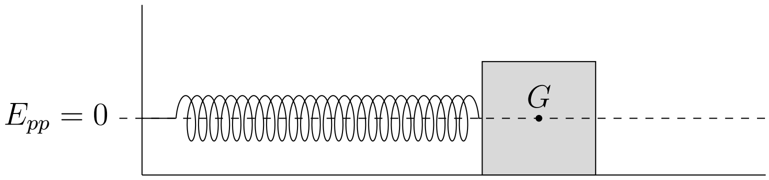
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right) \\ &= -x_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \end{aligned}$$

À $t = 0$ on a :

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = -x_m \frac{2\pi}{T_0}\sin(\varphi)$$

Or cette expression doit être positive alors : $\sin(\varphi) < 0 \Longrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$

Étude énergétique :



L'énergie cinétique : C'est l'énergie qu'un corps possède du fait de son mouvement, son unité est Joules (J), elle est donné par la relation suivante :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle : C'est l'énergie que possède le corps potentiellement, et capable d'être transformé en autre forme d'énergie, son unité est Joules (J), dans notre cas c'est la somme de l'énergie potentielle du pesanteur, et potentielle élastique, en choisissant l'axe passant par le centre d'inertie G comme l'origine de l'énergie, on obtient : $E_{pp} = mg(z_0 - z_0) = 0$. Pour l'énergie élastique, son expression est :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

On prend $E_{pe} = 0$ lorsque $x = 0$, donc $C = 0$ et :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

Et l'énergie potentielle :

$$E_p = E_{pp} + E_{pe}$$

L'énergie mécanique : C'est l'énergie totale du système mécanique, emmagasinée comme énergie potentielle et cinétique, son unité est Joules (J) :

$$E_m = E_c + E_p$$

On rappelle que lorsque les frottements sont absents, l'énergie mécanique se conserve. Alors qu'elle est perdue lorsque les frottements sont présents.

$$\Delta E_m = \begin{cases} 0, & \text{Absence des frottements} \\ -Q, & \text{Présence des frottements} \end{cases}$$

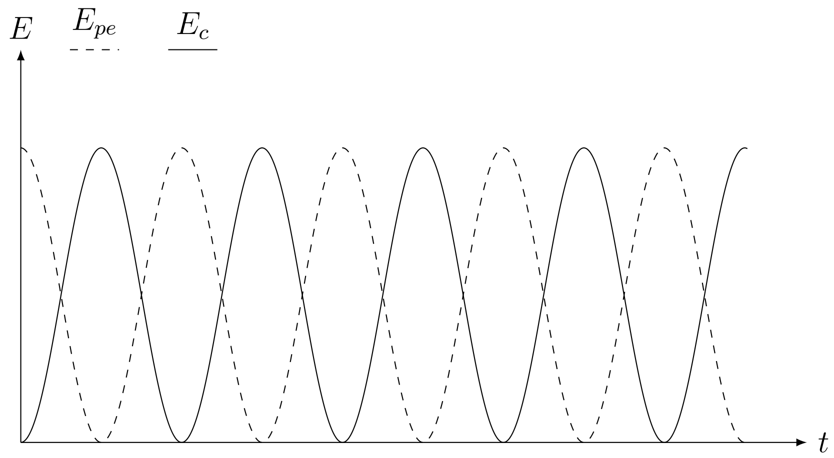
Où Q est la chaleur en Joules (J).

$$\begin{aligned} E_m &= E_p + E_c \\ &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) \\ 0 &= kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + m\dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} \\ &= kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} \end{aligned}$$

$$kx + m\ddot{x} = 0$$

$$\frac{k}{m}x + \ddot{x} = 0$$

C'est la même équation différentielle obtenue à partir l'étude dynamique.
On sait que : $E_m = E_{pe} + E_c = \mathrm{C^{te}}$.



On constate un échange d'énergie potentielle et cinétique dans le système.
On admet que la période énergétique T vaut la moitié de la période propre des oscillations :

$$\begin{aligned}
E_{pe} &= \frac{1}{2}kx^2 \\
&= \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right) \\
&= \frac{1}{2}kx_m^2\left(\frac{\cos\left(2\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)\right)+1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}kx_m^2 + \frac{1}{4}\cos\left(2\frac{2\pi}{T_0}t+2\varphi\right) \\
&= \frac{1}{4}kx_m^2 + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{\frac{T_0}{2}}+\varphi'\right) \\
&= \frac{1}{4}kx_m^2 + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{T}+\varphi'\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$T = \frac{T_0}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi' = 2\varphi$$

Autrement dit, les échanges sont faites 2 fois pendant T_0.
Le travail de la tension du ressort :
Généralement le travail d'une force est calculé à partir la relation suivante :

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B \vec{F}.\mathrm{d}\vec{l}$$

Le déplacement du ressort se fait selon l'axe (Ox), donc le vecteur du déplacement élémentaire peut être remplacé par dx :

$$\begin{aligned}\underset{A\to B}{W}\left(\vec{T}\right) &= \int_A^B \vec{T}.\mathrm{d}\vec{l} \\ &= \int_A^B -kx\mathrm{d}x \\ &= -k\frac{x^2}{2}\bigg|_{x_A}^{x_B} \\ &= -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)\end{aligned}$$

D'où le travail de la force du rappel, lorsque le point d'application se déplace d'un point A à B, est :

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{T}\right) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2)$$

Remarque : Vu l'année précédente, on sait que la variation de l'énergie potentielle du pesanteur est donnée par la relation :

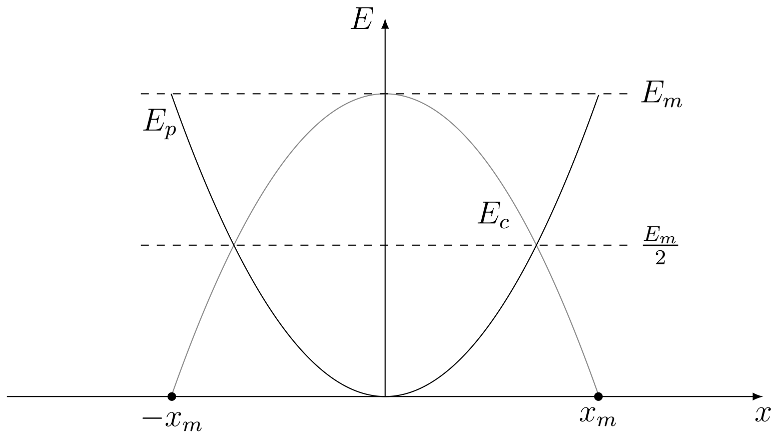
$$\Delta E_{pp} = -W\left(\vec{P}\right)$$

On peut démontrer que :

$$\Delta E_{pe} = -W\left(\vec{T}\right)$$

$$\begin{aligned}\Delta E_{pe} &= E_{pe_f} - E_{pe_i} \\ &= \frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) \\ &= -W\left(\vec{T}\right)\end{aligned}$$

Diagramme d'énergie :



Les frottements sont négligeables, donc l'énergie mécanique se conserve.
Lorsque $x = \pm x_m$ alors $\dot{x} = 0$, d'où : $E_m = \dfrac{1}{2}kx_m^2$.
Et lorsque $x = 0$ alors $\dot{x} = \pm\dot{x}_m$, d'où : $E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$.
On déduit donc que :

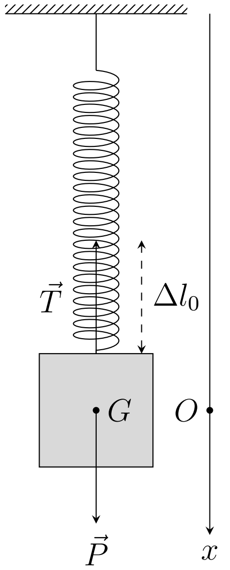
$$\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_m^2 \Longleftrightarrow \dot{x}_m = \sqrt{\frac{k}{m}}x_m$$

Par suite la vitesse est maximale lorsque le corps parcourt la distance maximale x_m.

Pendule élastique vertical :

Étude dynamique :

À l'extrémité libre d'un ressort de spires non jointives et de masse négligeable, on attache un corps (S) de masse m.
Dans ce cas il faut faire attention en ce qui concerne l'élongation du ressort, car lors du suspension du corps, le ressort s'allonge d'une distance Δl_0. Pour la déterminer on étudie le système en équilibre :



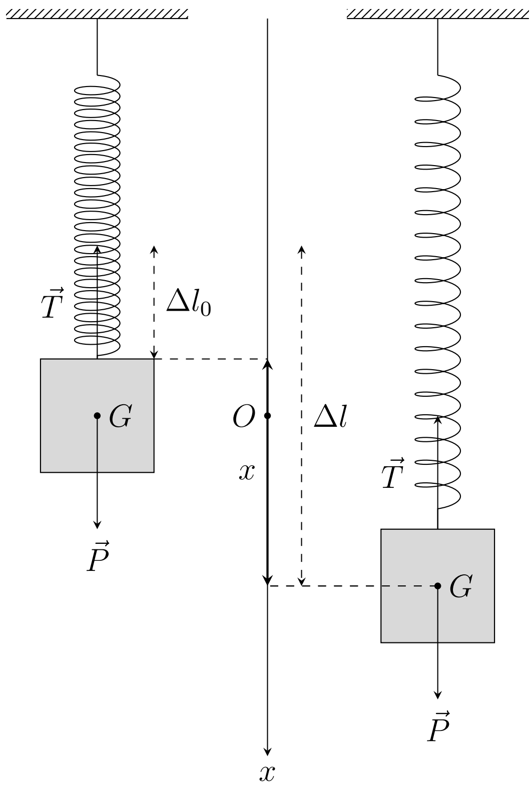
Système étudié : $\{(S)\}$
Bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P}: & \text{Le poids du corps} \\ \vec{T}: & \text{La tension du ressort} \end{cases}$$

Dans le référentiel terrestre supposée galiléen on associe le repère (Ox), On applique la première loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$
$$P - T = 0$$
$$mg = k\Delta l_0$$
$$\Delta l_0 = \frac{mg}{k}$$

En allongeant le corps (S) vers le bas, il effectue un mouvement oscillatoire, on suppose que l'air n'a aucun effet sur le mouvement de (S) :



Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P}: & \text{Le poids du corps} \\ \vec{T}: & \text{La tension du ressort} \end{cases}$$

Dans le repère (Ox) associé au référentiel terrestre galiléen, on applique la deuxième loi de Newton :

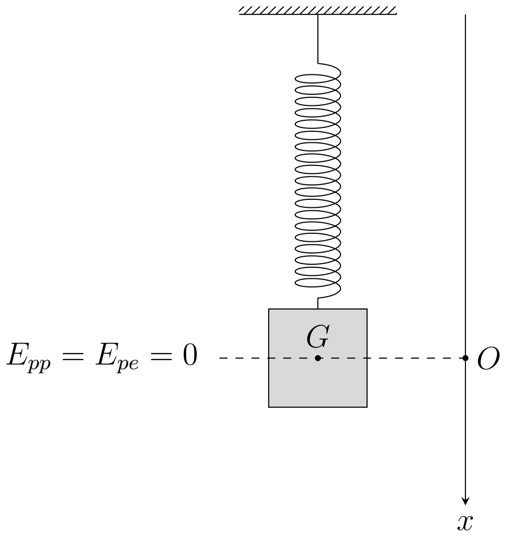
$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= m\vec{a}\\ \vec{P}+\vec{T} &= m\vec{a}\\ mg - k\Delta l &= m\ddot{x}\\ mg - k\left(\frac{mg}{k}+x\right) &= m\ddot{x}\\ mg - mg - kx &= m\ddot{x}\\ m\ddot{x}+kx &= 0\\ \ddot{x}+\frac{k}{m}x &= 0\end{aligned}$$

C'est la même équation différentielle obtenue dans la section précédente, sa solution est toujours de la forme :

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

Sa période propre des oscillations est : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Étude énergétique :



Énergie potentielle : On considère que lorsque le système est en équilibre $E_{pe} = 0$, ainsi que le plan passant par G à l'équilibre, constitue l'état référentiel de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = 0$:
On sait que l'énergie potentielle de pesanteur est :

$$E_{pp} = -mgx + C$$

Déterminons C :
Lorsque $x = x_G = 0$ on a :

$$\begin{aligned}E_{pp} &= 0\\ -mgx_G + C &= 0\\ C &= 0\end{aligned}$$

Par suite :

$$E_{pp} = -mgx$$

Et l'énergie potentielle élastique est :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + C$$

Avec $\Delta l = \Delta l_0 + x$, déterminons C :
Lorsque le système est en équilibre on a :

$$\begin{aligned} E_{pe} &= 0 \\ \frac{1}{2}\Delta l_0^2 + C &= 0 \\ C &= -\frac{1}{2}\Delta l_0^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} E_{pe} &= \frac{1}{2}k\Delta l^2 - \frac{1}{2}k\Delta l_0 \\ &= \frac{1}{2}k\left((\Delta l_0 + x)^2 - \Delta l_0^2\right) \\ &= \frac{1}{2}k(\Delta l_0^2 + 2\Delta l_0 x + x^2 - \Delta l_0^2) \\ &= \frac{1}{2}kx^2 + k\Delta l_0 x \end{aligned}$$

Par suite l'énergie potentielle du système est :

$$\begin{aligned} E_p &= -mgx + \frac{1}{2}kx^2 + k\Delta l_0 x \\ &= x\left(\underbrace{k\Delta l_0 - mg}_{0} + \frac{1}{2}kx\right) \\ &= \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

Énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E_m &= E_p + E_c \\ &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ &= \frac{1}{2}(kx^2 + m\dot{x}^2) \end{aligned}$$

On dérive E_m sachant qu'elle est constante :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \frac{1}{2}(2kx\dot{x} + 2m\dot{x}\ddot{x}) &= 0 \\ \dot{x}(kx + m\ddot{x}) &= 0 \\ \frac{k}{m}x + \ddot{x} &= 0 \end{aligned}$$

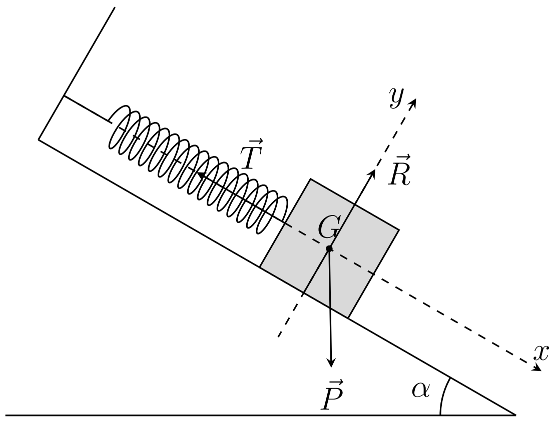
Et encore une fois on obtient l'équation différentielle, de solution :

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Pendule élastique incliné :

Étude dynamique :

Dans un plan lisse incliné d'un angle α, on attache à l'extrémité d'un ressort de spires non jointives et de masse négligeables, un corps (S) de masse m, le ressort s'allonge donc d'une distance Δl_0, on la détermine en étudiant le système à l'équilibre :



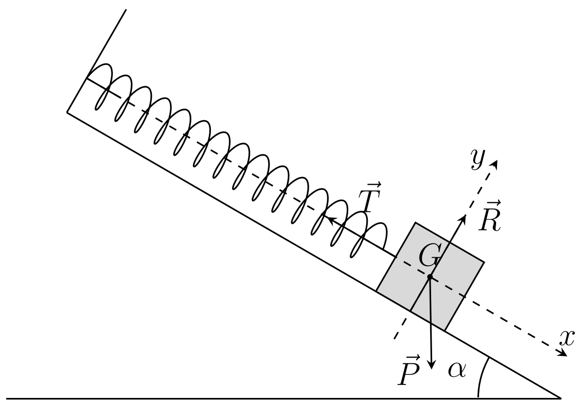
Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P}: & \text{Le poids du corps} \\ \vec{T}: & \text{La tension du ressort} \\ \vec{R}: & \text{La réaction du plan} \end{cases}$$

Dans le repère (Gx) associé au référentiel terrestre galiléen, on applique la première loi de Newton :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \vec{0} \\ \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} &= \vec{0} \\ P \sin\alpha - T &= 0 \\ P \sin\alpha &= T \\ k\Delta l_0 &= P \sin\alpha \\ \Delta l_0 &= \frac{mg \sin\alpha}{k} \end{aligned}$$

Maintenant on écarte le corps, et on le lâche sans vitesse initiale, il effectue un mouvement oscillatoire :



Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} : & \text{Le poids du corps} \\ \vec{T} : & \text{La tension du ressort} \\ \vec{R} : & \text{La réaction du plan} \end{cases}$$

Dans le repère (Gx) associé au référentiel terrestre galiléen, on applique la deuxième loi de Newton :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} &= m\vec{a} \\ P\sin\alpha - T &= m\ddot{x} \\ mg\sin\alpha - k\Delta l &= m\ddot{x} \\ mg\sin\alpha - k(\Delta l_0 + x) &= m\ddot{x} \\ \underbrace{mg\sin\alpha - k\Delta l_0}_{0} - kx &= m\ddot{x} \end{aligned}$$

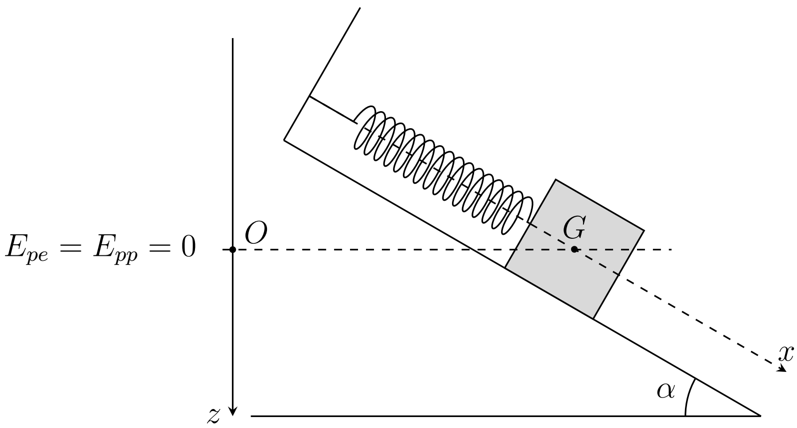
$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= 0 \\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \end{aligned}$$

C'est l'équation différentielle obtenue dans les deux premiers sections, sa solution est toujours :

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Sa période d'oscillations est : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Étude énergétique :



Énergie potentielle : On considère que l'énergie potentielle élastique est nulle $E_{pe} = 0$ lorsque le système est en équilibre, ainsi que le plan passant par G constitue à l'équilibre l'état référentiel de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = 0$: On sait que :

$$E_{pp} = -mgz + C$$

On détermine C :

$$\begin{aligned} E_{pp} &= 0 \\ -mgz_0 + C &= 0 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$E_{pp} = -mgz$$

Or $z = x \sin\alpha$, alors :

$$E_{pp} = -mgx\sin\alpha$$

Et on a :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + C$$

On détermine C :

$$\begin{aligned} E_{pe} &= 0 \\ \frac{1}{2}k\Delta l_0^2 + C &= 0 \\ C &= -\frac{1}{2}k\Delta l_0^2 \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} E_{pe} &= \frac{1}{2}k\Delta l^2 - \frac{1}{2}k\Delta l_0^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left((\Delta l_0 + x)^2 - \Delta l_0^2\right) \\ &= \frac{1}{2}k\left(\Delta l_0^2 + 2\Delta l_0 x + x^2 - \Delta l_0^2\right) \\ &= k\Delta l_0 x + \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

Par suite l'énergie potentielle est :

$$\begin{aligned} E_p &= -mgx\sin\alpha + k\Delta l_0 x + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= x\left(\underbrace{k\Delta l_0 - mg\sin\alpha}_{0} + \frac{1}{2}kx\right) \\ &= \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E_m &= E_p + E_c \\ &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ &= \frac{1}{2}(kx^2 + m\dot{x}^2) \end{aligned}$$

On dérive E_m sachant qu'elle est constante :

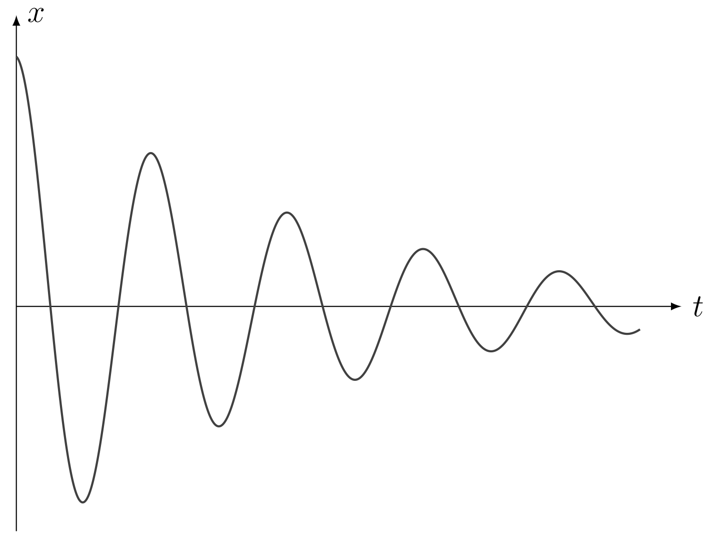
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \frac{1}{2}(2kx\dot{x} + 2m\dot{x}\ddot{x}) &= 0 \\ \dot{x}(kx + m\ddot{x}) &= 0 \\ \frac{k}{m}x + \ddot{x} &= 0 \end{aligned}$$

On obtient toujours l'équation différentielle de solution :

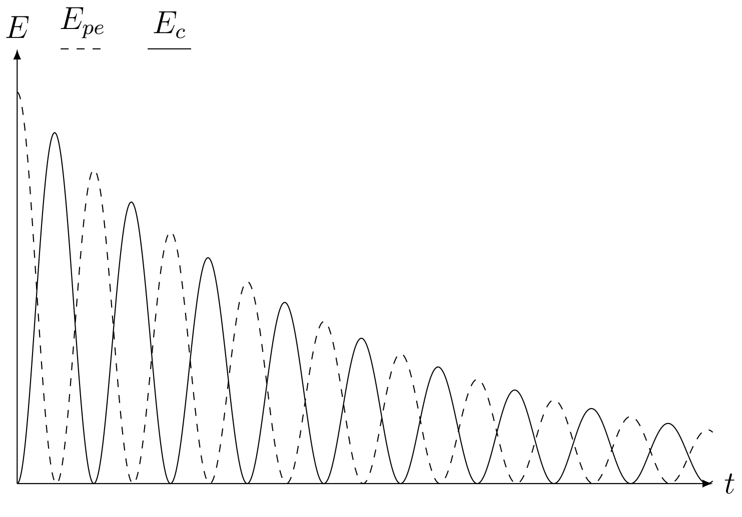
$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

L'amortissement des oscillations :

En réalité, les frottements ne sont pas négligeables, ceci constitue un obstacle devant le mouvement oscillatoire du corps. Le corps n'atteint plus $\pm x_m$, sa vitesse et son accélération décroient, et sur l'enregistrement on observe :



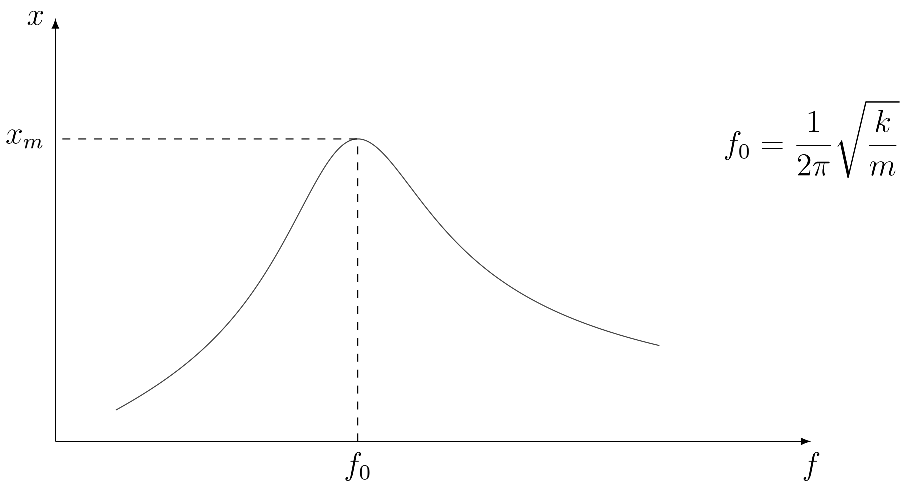
Dans ce cas le mouvement oscillatoire est pseudo-périodique de pseudo-période T.
Et puisque les frottements sont présents alors l'énergie mécanique ne se conserve plus, et diminue progressivement au cours du temps :



L'énergie mécanique se transforme progressivement en chaleur, et le mouvement continue jusqu'à que le système revient à sa position d'équilibre. Sa dérivée est donc négative vaut le travail des forces de frottements.

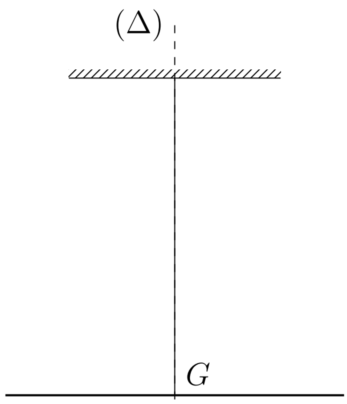
La résonance mécanique :

Parfois les systèmes mécaniques, sont obligés à osciller d'une fréquence imposée par un moteur mécanique par exemple, on dit que les oscillations sont forcées.
Dans ce cas le moteur est dit excitateur, il impose la fréquence à un système oscillant dit résonateur, la période du résonateur est donc identique à celle du excitateur, ainsi qu'elle est proportionnelle à l'amplitude du résonateur, cette dernière est maximale lorsque $T = T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ autrement dit $f = f_0$, c'est-à-dire l'excitateur impose la fréquence des oscillations libres.



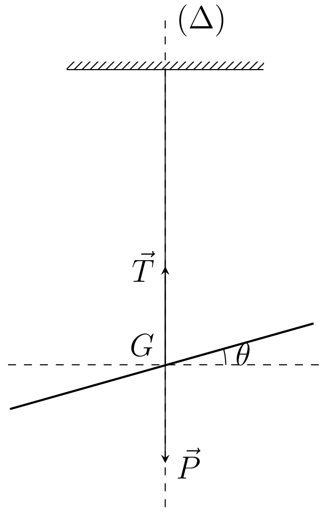
Pendule de torsion :

Le pendule de torsion est un système constitué d'une barre (S), attaché à l'extrémité d'un fil par un point G appartenant à l'axe (Δ) qui passe par le centre d'inertie de cette barre.



Étude dynamique :

On écarte la barre de sa position initiale d'équilibre, et on la lâche sans vitesse initiale. Elle effectue donc un mouvement oscillatoire de rotation. On étudie ces oscillations à un instant t où la barre se trouve en une position repérée par l'angle θ.



Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} : & \text{Le poids de la barre} \\ \vec{T} : & \text{La tension du fil} \\ C : & \text{Le couple de torsion} \end{cases}$$

On rappelle que le moment du rappel $\mathscr{M} = -C\theta$, qui permet à la barre de retrouver sa position initiale. C est la constante de torsion qui dépend du fil son unité est N.m.rad^{-1}.
D'après la relation fondamentale de la dynamique on a :

$$\sum \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{F}\right) = J_\Delta\ddot{\theta}$$
$$\mathscr{M}_\Delta\left(\vec{P}\right) + \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{T}\right) + \mathscr{M} = J_\Delta\ddot{\theta}$$

Puisque $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont confondues avec (Δ) alors :

$$\mathscr{M}_\Delta\left(\vec{P}\right) = \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{T}\right) = 0$$

Par suite :

$$\mathscr{M} = J_\Delta\ddot{\theta}$$
$$-C\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$$
$$J_\Delta\ddot{\theta} + C\theta = 0$$
$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du seconde ordre, sa solution est :

$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Où :

$$\begin{cases} \theta_m & \text{Amplitudeangulaire maximale en (rad)} \\ T_0 & \text{La période propre des oscillations (s)} \\ \varphi & \text{Phase à l'origine des dates en (rad)} \end{cases}$$

Afin d'obtenir l'expression de $\omega = \dot{\theta}$, on dérive par rapport au temps θ :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right)$$
$$\dot{\theta} = -\theta_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

On pose $\theta_m \dfrac{2\pi}{T_0} = \dot{\theta}_m$, on obtient :

$$\dot{\theta} = -\dot{\theta}_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Et en dérivant cette dernière par rapport au temps, et on trouve l'équation de l'accélération angulaire :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\dot{\theta}_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right) \\
\ddot{\theta} &= -\frac{2\pi}{T_0}\dot{\theta}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)
\end{aligned}$$

On pose : $\dfrac{2\pi}{T_0}\dot{\theta}_m = \ddot{\theta}_m$, on obtient donc :

$$\ddot{\theta} = -\ddot{\theta}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

La période T_0 et la fréquence f_0 :
On a :

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= -\ddot{\theta}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \\
\ddot{\theta} &= -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \\
\ddot{\theta} &= -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta
\end{aligned}$$

C'est l'équation caractéristique du mouvement de rotation oscillatoire.
On sait d'après l'équation différentielle que :

$$\ddot{\theta} = -\frac{C}{J_\Delta}\theta$$

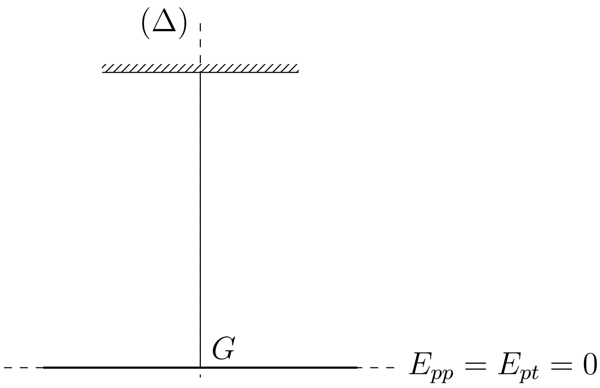
Par suite :

$$\begin{aligned}
\frac{C}{J_\Delta} &= \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \\
T_0^2 &= (2\pi)^2 \frac{J_\Delta}{C} \\
T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}
\end{aligned}$$

C'est la période propre du pendule élastique en oscillations libres non amorties, la fréquence est donc :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$$

Étude énergétique :



Énergie potentielle :
Dans ce cas :

$$E_p = E_{pp} + E_{pt}$$

On suppose que le plan horizontal passant par G à l'équilibre, constitue l'état référentiel de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = 0$. Ceci résulte que l'énergie potentielle reste toujours nulle au cours des oscillations. Pour l'**énergie potentielle de torsion**, l'énergie mise en évidence après la rotation de la barre. Son expression est :

$$E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 + C'$$

On prend $E_{pt} = 0$ lorsque $\theta = 0$, donc $C' = 0$, par suite :

$$E_p = E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2$$

Énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}$$

Énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E_m &= E_p + E_c \\ &= \frac{1}{2}C\theta^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Les oscillations sont non-amorties, donc on a un échange entre l'énergie potentielle et cinétique, alors que celle mécanique reste constante.
On dérive par rapport au temps E_m :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}C\theta^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2\right) &= 0 \\ C\theta\dot{\theta} + J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta} &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta &= 0 \end{aligned}$$

C'est l'équation différentielle obtenue à partir de l'étude dynamique, sa solution est :

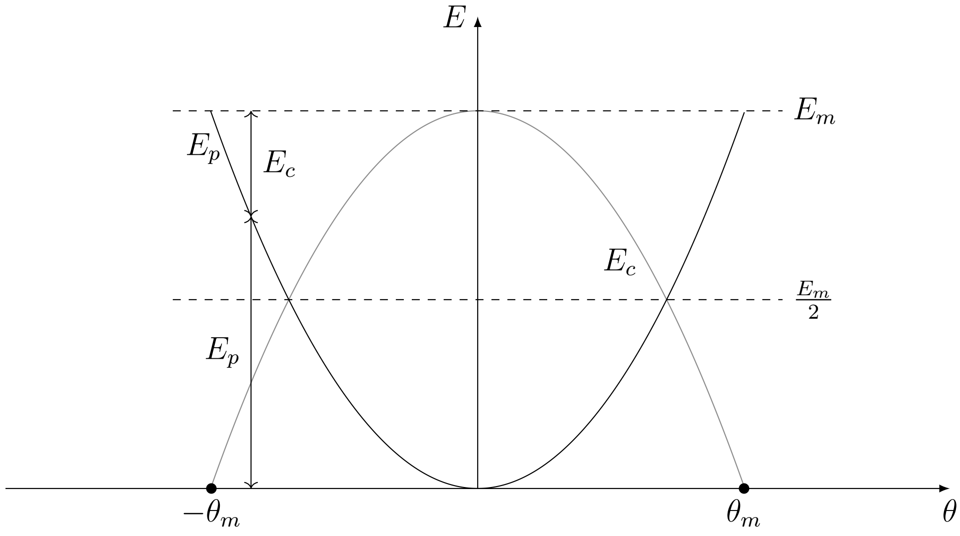
$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Diagramme d'énergie :
Les frottements sont négligeables donc on a une conservation d'énergie mécanique :
Lorsque $\theta = 0$ on a : $\dot{\theta} = \pm\dot{\theta}_m$, et lorsque $\theta = \theta_m$ on a $\dot{\theta} = 0$, par suite :

$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_m^2 = \frac{1}{2}C\theta_m^2$$

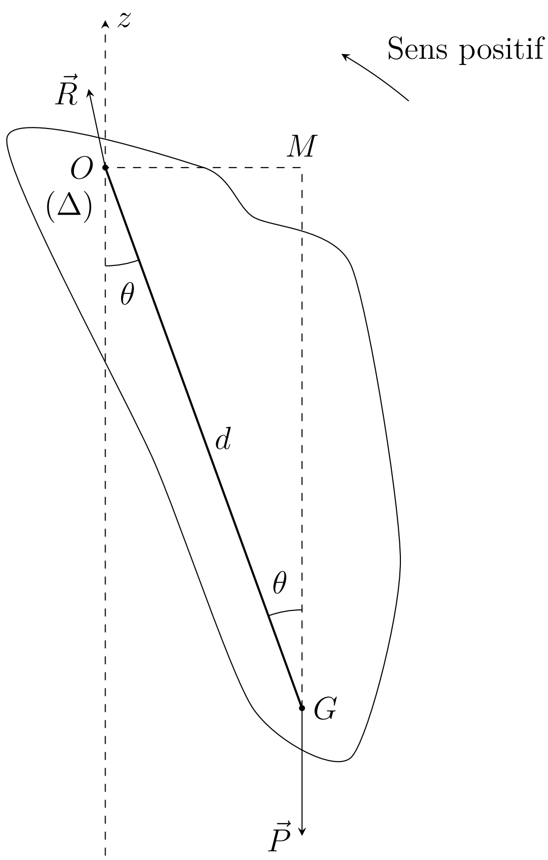
On peut déduire que :

$$\dot{\theta}_m = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}\theta_m$$



Pendule pesant :

Le pendule pesant, est tout solide mobile autour un axe (Δ), horizontal et fixe ne passant pas par son centre d'inertie.



Étude dynamique :

Écartons le solide (S) de sa position d'équilibre et lâchons le sans vitesse initiale. Il effectue donc un mouvement oscillatoire. On étudie ces oscillations à un instant t où le solide se trouve en une position repérée par l'angle θ.
Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P}: & \text{Le poids de la barre} \\ \vec{R}: & \text{La réaction de l'axe} \end{cases}$$

On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} \sum \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{F}\right) &= J_\Delta\ddot{\theta} \\ \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{P}\right) + \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{R}\right) &= J_\Delta\ddot{\theta} \\ -P.OM &= J_\Delta\ddot{\theta} \\ -mgd\sin\theta &= J_\Delta\ddot{\theta} \end{aligned}$$

D'où :

$$J_\Delta\ddot{\theta} + mgd\sin\theta = 0 \Longleftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\theta = 0$$

Car pour les petit angles on prend toujours comme approximation : $\sin\theta \approx \theta$.
L'équation différentielle obtenue est :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\theta = 0$$

De solution :

$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

En la dérivant deux fois successivement par rapport au temps on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= -\theta_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \\ \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\theta_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \\ \ddot{\theta} &= -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\theta \end{aligned}$$

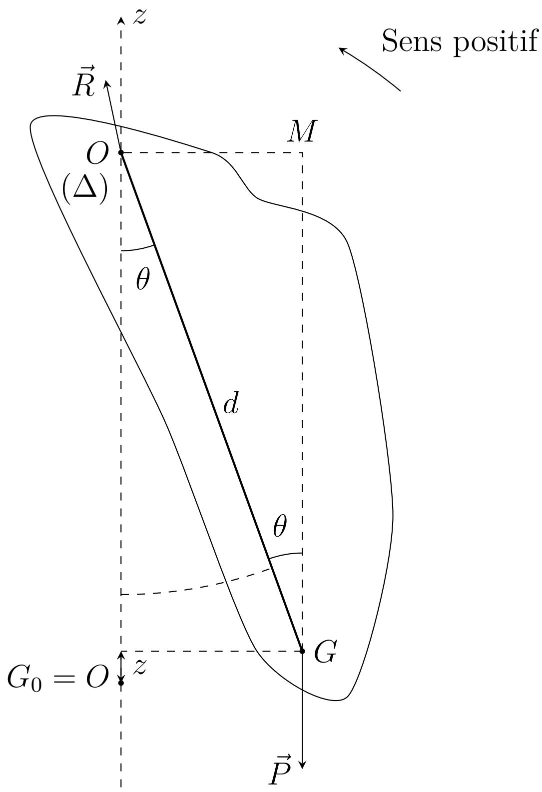
Or :

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgd}{J_\Delta}\theta$$

Alors :

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{mgd}{J_\Delta} \Longleftrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgd}}$$

Étude énergétique :



Énergie potentielle :
Dans ce cas on a :

$$E_p = E_{pp} = mgz + C$$

On suppose que le plan horizontal passant par $O = G_0$ à l'équilibre, comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur, $E_{pp} = 0 \Longleftrightarrow mgz_0 + C = 0 \Longleftrightarrow C = 0$, par suite :

$$E_p = mgz$$

À un instant t, le solde se trouve en une position repéré par θ.

$$\begin{aligned} z &= d - OG_0 \\ &= d - d\cos\theta \\ &= d(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

D'où :

$$E_p = mgd(1 - \cos\theta)$$

Énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}$$

Énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E_m &= E_p + E_c \\ &= mgd(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Les frottements sont négligeables donc, E_m est conservée. On la dérive par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mgd(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2\right) = 0$$

$$mgd\sin(\theta)\,\dot{\theta} + J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

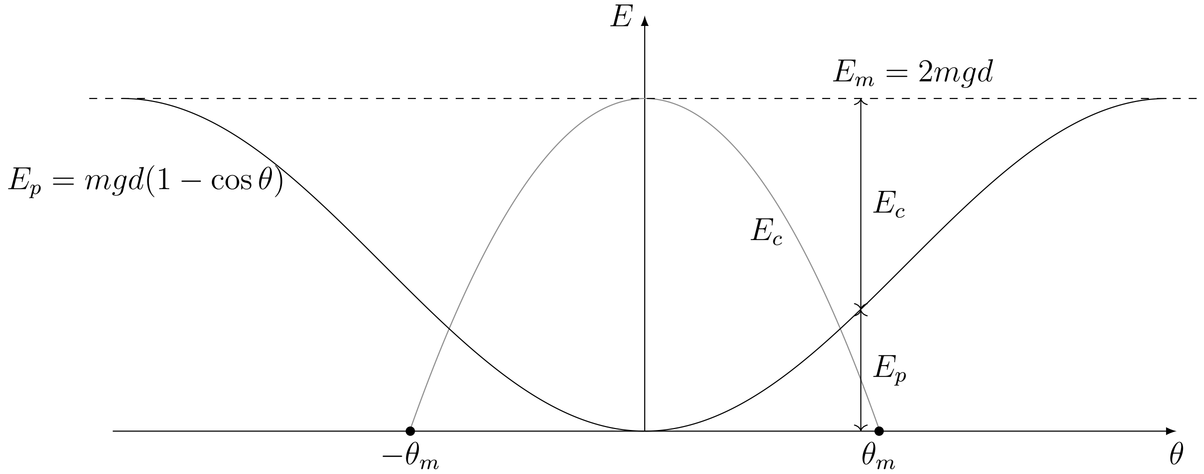
$$J_\Delta\ddot{\theta} + mgd\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\theta = 0$$

C'est la même équation différentielle obtenue précédemment.
Diagramme d'énergie : On sait que :

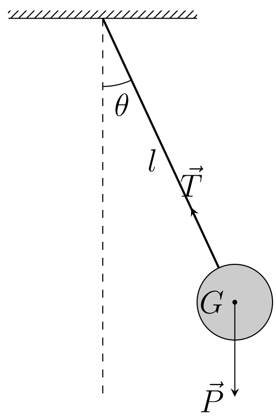
$$E_p = mgd(1-\cos\theta)$$

Lorsque $\cos\theta = -1$, alors $E_{p_m} = E_m = 2mgd$, ainsi que l'énergie cinétique s'annule en $\pm\theta$.



Pendule simple :

Le pendule simple est tout point matériel de masse m, qui peut osciller autour d'un axe horizontal fixe (Δ).



Les mêmes étapes à suivre, pour étudier ces oscillations, il faut mentionner que :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgl}}$$

Or $J_\Delta = ml^2$, alors :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

EXERCICE 1

Deuxième situation

On relie un corps solide (S_2) , de masse m_2= 182 g , à un ressort à spires non jointive , de masse négligeable et de raideur K , et on fixe l'autre bout du ressort à un support fixe (figure 2).

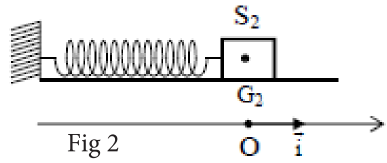


Fig 2

Le corps (S_2) peut glisser sans frottement sur un plan horizontal .
On écarte le corps (S_2) de sa position d'équilibre de la distance X_m ,et on le libère sans vitesse initiale .
Pour étudier le mouvement de G_2, on choisie le référentiel galiléen (O, $\vec{i}$) tel que la position de G_2 à l'origine des dates est confondue avec l'origine O .
On repère la position de G_2 à l'instant t par l'abscisse x dans le repère (O, $\vec{i}$) .

L'équation différentielle du mouvement de G_2 s'écrit : $\ddot{x} + \frac{K}{m_2}\, x = 0$ et sa solution est de la forme $x(t) = X_m.\cos(\frac{2\pi}{T_o}\, t + \varphi)$.

L'étude expérimentale du mouvement de G_2 a permis d'obtenir le graphe représenté sur la figure 3 .

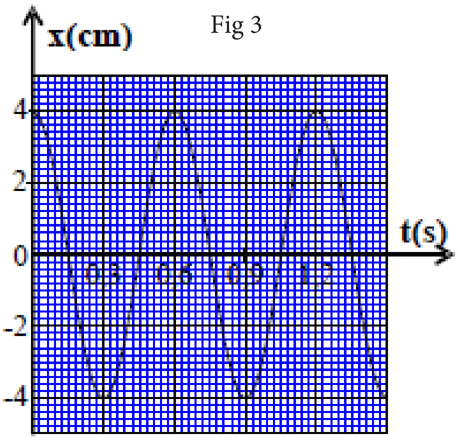


Fig 3

2-1- Déterminer en exploitant le graphe les grandeurs suivantes :

l'amplitude X_m , la période T_o et φ la phase à l'origine des dates . **(0,75 pt)**

2-2- En déduire la raideur K du ressort . **(0,75 pt)**

2-3- On choisi le plan horizontal passant par la position de G_2 à l'équilibre comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur et l'état où le ressort n'est pas déformé comme origine de l'énergie potentielle élastique .

2-3-1- Montrer que l'énergie cinétique E_C du corps (S_2) s'écrit : $E_C = \frac{K}{2}.(X_m - x)$. **(0,75 pt)**

2-3-2- Trouver l'expression de l'énergie mécanique du système { corps S_2 - ressort } en fonction de X_m et K et en déduire la vitesse v_{G2} lorsque G_2 passe par la position d'équilibre dans le sens positif .

EXERCICE 2

Les ressorts se trouvent dans plusieurs appareils mécaniques , comme les voitures et les bicyclettes ... et produisent des oscillations mécaniques .
Cette partie a pour objectif , l'étude énergétique d'un système oscillant (corps solide - ressort) dans une position horizontale.

Soit un oscillateur mécanique horizontal composé d'un corps solide (S) de masse m et de centre d'inertie G fixé à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives et de masse négligeable et de raideur K = 10 N.m^{-1} .

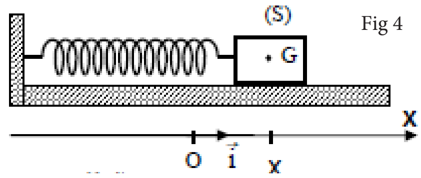


Fig 4

L'autre extrémité du ressort est fixée à un support fixe .
Le corps (S) glisse sans frottement sur le plan horizontal .
On étudie le mouvement de l'oscillateur dans le repère (O , $\vec{i}$)lié à la Terre et dont l'origine est confondue avec la position de G à l'équilibre de (S) .
On repère la position de G à l'instant t par son abscisse x . (Figure 4)
On écarte le corps (S) horizontalement de sa position d'équilibre dans le sens positif d'une distance X_o et on le libère sans vitesse initiale à l'instant pris comme origine des dates .
On choisie le plan horizontal passant par G comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur , et l'état dans lequel le ressort n'est pas déformé comme référence de l'énergie potentielle élastique .
A l'aide d'un dispositif informatique adéquat , on obtient les deux courbes représentant les variation de l'énergie E_C cinétique et l'énergie potentielle élastique E_{Pe} du système oscillant en fonction du temps . (Figure 5)

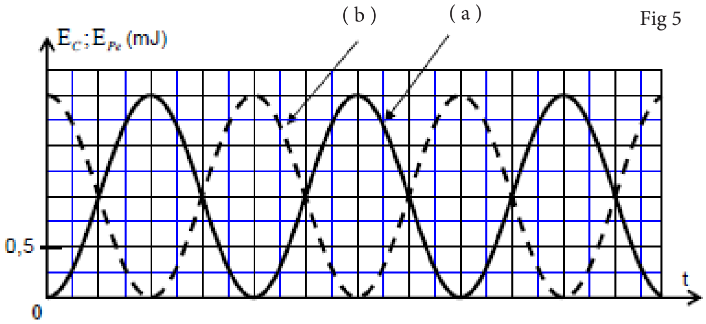


Fig 5

1- Indiquer parmi les courbes (a) et (b) celle qui représente les variations de l'énergie cinétique E_C . justifier votre réponse .
2- Déterminer la valeur de l'énergie mécanique E_m du système oscillant .
3- En déduire la valeur de la distance X_o .
4- En considérant la variation de l'énergie potentielle élastique du système oscillant , trouver le travail $W_{A\to O}(\vec{T})$ de la force de rappel $\vec{T}$ exercée par le ressort sur (S) lors du déplacement de G de la position A d'abscisse $x_A = X_o$ vers la position O .

EXERCICE 3

Partie II : Étude énergétique d'un oscillateur mécanique (solide-ressort)

Un système oscillant est constitué d'un solide (S), de centre d'inertie G et de masse m, et d'un ressort horizontal, à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur K = 20N.m^{-1} .
Le solide (S) est accroché à l'une des deux extrémités du ressort, l'autre extrémité est fixée à un support immobile.
On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre d'une distance X_m puis on le lâche sans vitesse initiale. Le solide (S) oscille sans frottements sur un plan horizontal. (figure 1)

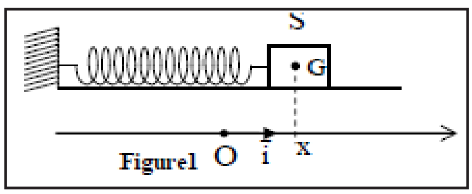


Figure1

On étudie le mouvement du centre d'inertie G dans un repère (O, $\vec{i}$) lié à un référentiel terrestre considéré comme galiléen. L'origine O de l'axe coïncide avec la position de G lorsque le solide (S) est à l'équilibre.
On repère ,dans le repère (O, $\vec{i}$) la position de G à un instant t par l'abscisse x .
On choisit le plan horizontal passant par G comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur et l'état où G est à la position d'équilibre (x=0) comme référence de

l'énergie potentielle élastique.
L'équation horaire du mouvement de G s'écrit sous forme : $x(t)= X_m .\cos(\frac{2\pi}{T}t +\varphi)$.
La courbe de la figure 2 représente le diagramme des espaces x(t) .
1- Déterminer les valeurs de X_m ,T_o et de φ .
2- Déterminer la valeur de l'énergie mécanique E_m de l'oscillateur étudié. **(0,75 pt)**
3- Trouver la valeur de l'énergie cinétique E_{C1} de l'oscillateur mécanique à l'instant $t_1 = 0,3s$.
4- Calculer le travail $W_{AB}(\vec{F})$ de la force de rappel lorsque le centre d'inertie G se déplace de la position A d'abscisse $x_A = 0$ à la position B d'abscisse $x_B = \frac{X_m}{2}$.

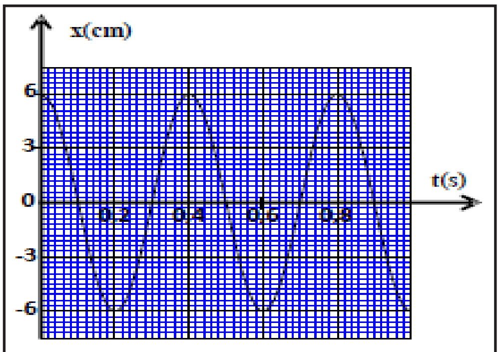


Figure2

EXERCICE 4

2. Étude du mouvement d'un système oscillant {solide (S)- ressort}

On fixe le solide (S) précédent à un ressort horizontal à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K.
À l'équilibre, le centre d'inertie G coïncide avec l'origine du repère $(O,\vec{i})$ lié à la terre considéré comme galiléen (figure 2).
On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à l'instant $t_0 = 0$.

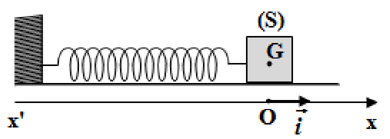


Figure 2

Données:
- Tous les frottements sont négligeables;
- On choisit l'état où le ressort n'est pas déformé comme référence de l'énergie potentielle élastique E_{pe} et le plan horizontal contenant G comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} .

La courbe de la figure (3) représente les variations de E_{pe} en fonction de x^2, carré de l'abscisse x du centre d'inertie G dans le repère $(O,\vec{i})$.

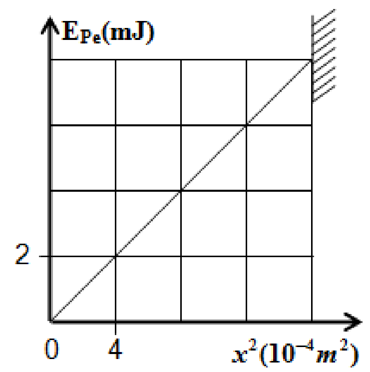


Figure 3

2.1. En exploitant la courbe de la figure (3), trouver les valeurs de:
a. la constante de raideur K.
b. l'énergie potentielle élastique maximale $E_{pe,max}$.
c. l'amplitude X_m des oscillations.

2.2. Déduire, en justifiant votre réponse, la valeur de l'énergie mécanique E_m du système oscillant.

2.3. Le centre d'inertie G passe par la position d'équilibre dans le sens positif avec la vitesse $v= 0,25\ m.s^{-1}$.

Montrer que l'expression de la période propre des oscillations s'écrit $T_0 = 2\pi.\frac{X_m}{v}$. Calculer T_0 .

EXERCICE 5

Partie II : -Etude du mouvement d'un pendule élastique

Un oscillateur mécanique vertical est constitué d'un corps solide S de masse $m=200g$ et d'un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de raideur K .L'une des extrémités du ressort est fixée à un support fixe et l'autre extrémité est liée au solide S (figure2).
On se propose d'étudier le mouvement du centre d'inertie G du solide S dans un repère $R(O,\vec{k})$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen.
On repère la position de G à un instant t par la côte z sur l'axe $(O,\vec{k})$. A l'équilibre, G est confondu avec l'origine O du repère $R(O,\vec{k})$.On prendra $\pi^2 =10$.

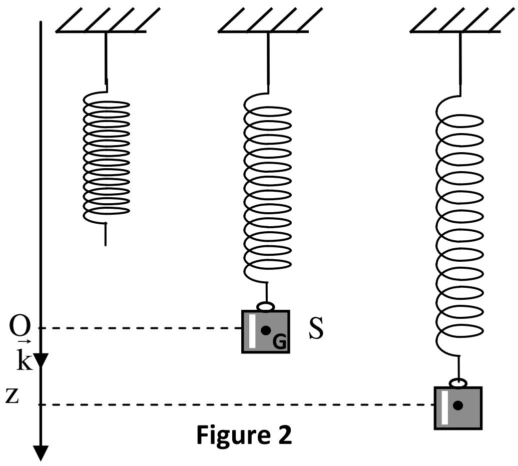


Figure 2

1- Frottements négligeables

On écarte verticalement le solide S de sa position d'équilibre et on l'envoie à l'instant de date $t=0$, avec une vitesse initiale $\vec{V}_0 = V_{0z}\vec{k}$.

La courbe de la figure 3 représente l'évolution de la côte $z(t)$ du centre d'inertie G.

1-1-Déterminer, à l'équilibre, l'allongement $\Delta\ell_0$ du ressort en fonction de m, K et de l'intensité de la pesanteur g.

1-2- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la côte z du centre d'inertie G.

1-3 -La solution de cette équation différentielle s'écrit $z = z_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ avec T_0 la période propre de l'oscillateur.

Déterminer la valeur de K et celle de V_{0z}.

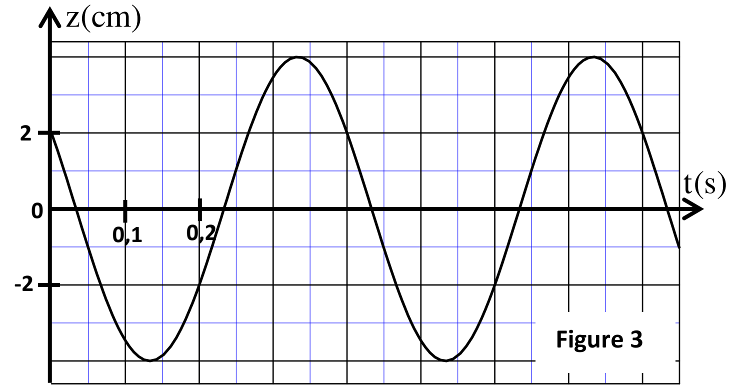


Figure 3

2-Frottements non négligeables

On réalise deux expériences en plongeant l'oscillateur dans deux liquides différents. Dans chaque expérience, on écarte verticalement le solide S de sa position d'équilibre d'une distance z_0 et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t=0$, le solide S oscille alors à l'intérieur du liquide.

Les courbes (1) et (2) de la figure 4 représentent l'évolution de la côte z du centre d'inertie G au cours du temps dans chaque liquide.

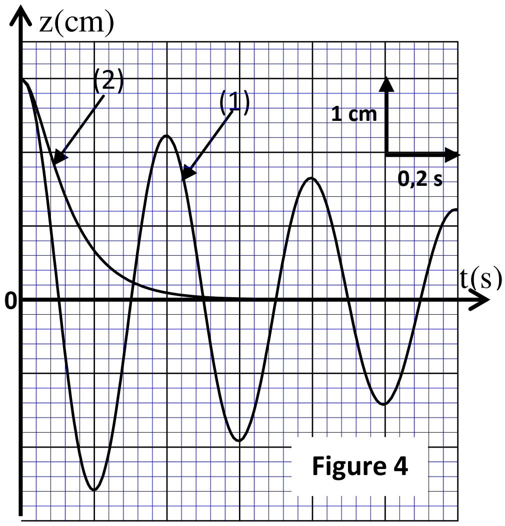


Figure 4

2-1- Associer à chaque courbe le régime d'amortissement correspondant.

2-2-On choisit le plan horizontal auquel appartient le point O, origine du repère $R(O,\vec{k})$, comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} $(E_{pp}=0)$ et l'état où le ressort est non déformé comme état de référence de l'énergie potentielle élastique E_{pe} $(E_{pe}=0)$.

Pour les oscillations correspondant à la courbe (1) :

2-2-1- Trouver, à un instant de date t, l'expression de l'énergie potentielle $E_p = E_{pp} + E_{pe}$ en fonction de K, z et $\Delta\ell'_0$ l'allongement du ressort à l'équilibre dans le liquide.

2-2-2-Calculer la variation de l'énergie mécanique de l'oscillateur entre les instants $t_1=0$ et $t_2=0,4\,s$.

EXERCICE 6

Partie I : Etude énergétique d'un pendule élastique

Le pendule élastique étudié est constitué d'un solide (S), de centre d'inertie G et de masse $m=100\,g$, attaché à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur K. L'autre extrémité du ressort est fixée à un support fixe.

Le solide (S) peut glisser sans frottement sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle $\alpha = 30^0$ par rapport au plan horizontal (fig.1).

On étudie le mouvement du centre d'inertie G dans le repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$ lié au référentiel terrestre considéré comme galiléen. On repère la position de G à un instant t par l'abscisse x sur l'axe $(O,\vec{i})$.

A l'équilibre, G est confondu avec l'origine O du repère (fig.1).

On prendra $\pi^2=10$.

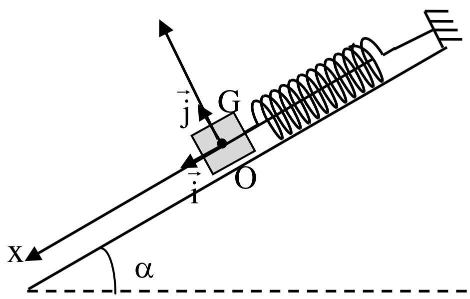


Figure1

1-Déterminer, à l'équilibre, l'expression de l'allongement

$\Delta\ell_0$ du ressort en fonction de K, m, α et de g l'intensité de la pesanteur .

2-On écarte (S) de sa position d'équilibre d'une distance X_0 dans le sens positif et on l'envoie à l'instant de date t=0 avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ telle que $\vec{V}_0 = -V_0\vec{i}$.

2.1 On choisit comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur le plan horizontal auquel appartient G à l'équilibre : $(E_{pp}(O)=0)$ et comme référence de l'énergie potentielle élastique l'état où le ressort est allongé à l'équilibre : $(E_{pe}(O)=0)$ .Trouver, à un instant t, l'expression de l'énergie potentielle $E_p = E_{pp} + E_{pe}$ de l'oscillateur en fonction de x et de K .

2.2- A partir de l'étude énergétique, établir l'équation différentielle régie par l'abscisse x .

2.3- La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme : $x(t) = X_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$.

(T_0 étant la période propre de l'oscillateur) .

La courbe de la figure 2 représente l'évolution de l'énergie potentielle E_p de l'oscillateur en fonction du temps.

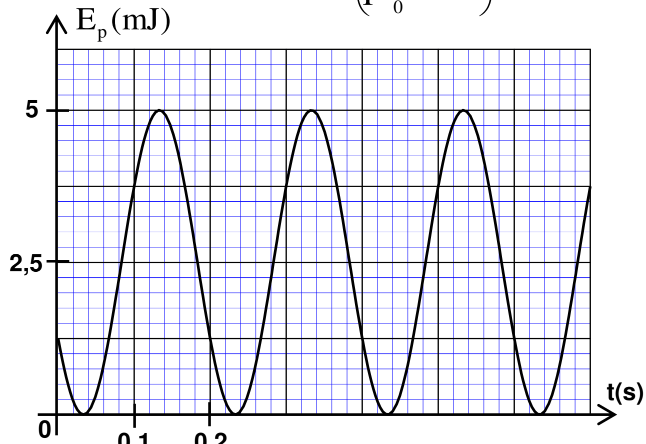


Figure 2

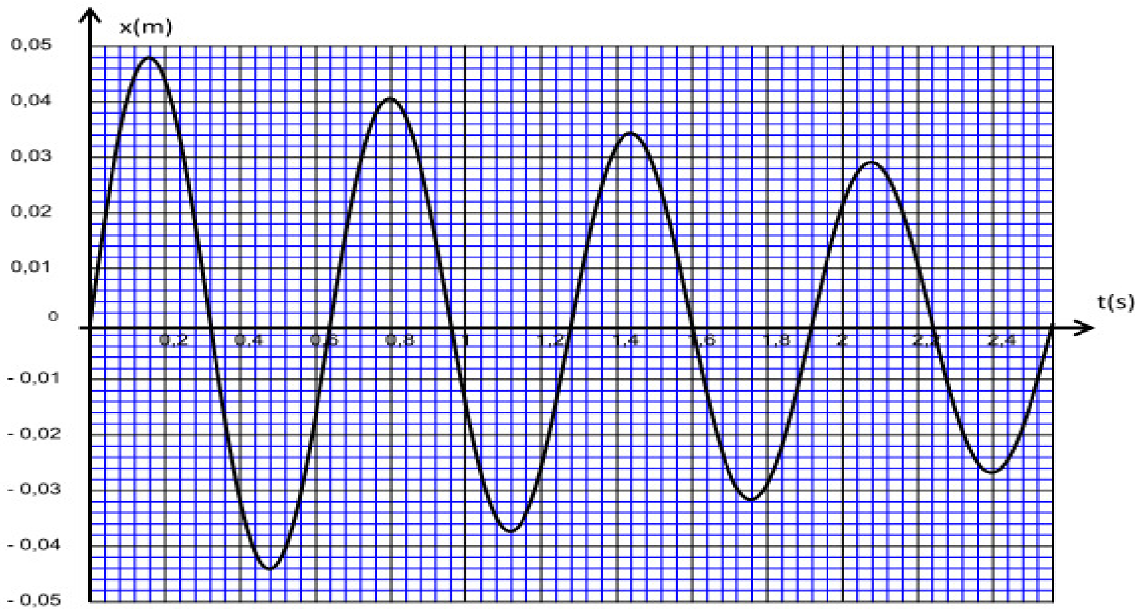
2.3.1-Trouver la valeur de la raideur K, de l'amplitude X_m et de la phase φ .

2.3.2-Par étude énergétique, trouver l'expression de V_0 en fonction de K, m et X_m .

Partie II Oscillations libres amorties

L' enregistrement du mouvement de l'oscillateur (fig2) à l'aide d'un oscillateur montre que l'amplitude des oscillations varie au cours du temps.

fig2



3.1- Justifier la diminution de l'amplitude des oscillations .

3.2- La pseudo-période T dans le cas d'amortissement faible s'exprime par la relation

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu.T_0}{4\pi.m}\right)^2}}$$

.Déterminer ,à l'aide du graphe , le coefficient d'amortissement μ .

.

EXERCICE 1

Les oscillateurs mécaniques sont employés dans différents secteurs industriels et quelques appareils de sports et les jeux et autres .
Parmi ces oscillateurs n la balançoire qu'on considère comme pendule .

Un enfant se balance à l'aide d'une balançoire constituée d'une barre qu'il utilise comme siège , suspendue par deux cordes fixées à un support fixe .

On modélise le système { enfant + balançoire } par un pendule simple composé d'un fil , inextensible de masse négligeable et de longueur L , et un corps (S) de masse m .

Le peut tourner autours d'un axe fixe horizontal (Δ) perpendiculaire au plan vertical . Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe (Δ) est $J_\Delta = m.L^2$.

Données :

- Intensité de la pesanteur : $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$; longueur du fil : L = 3 m ; masse du corps (S) : m = 18 kg .

O prend dans le cas de petites oscillations : $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ (rad) .

On néglige les dimensions du corps (S) par rapport à la longueur du fil et tous les frottements .

1- Étude dynamique du pendule :

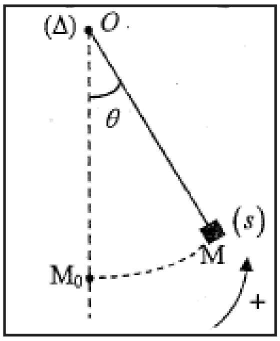
On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable d'un angle $\theta_m = \frac{\pi}{20}$ dans le sens positif et le libère sans vitesse initiale à l'instant t = 0 .

On repère la position du pendule à un instant t par l'abscisse angulaire θ défini entre le pendule et la verticale passant par le point O tel que $\theta = (\overrightarrow{OM_o}, \overrightarrow{OM})$ (voire figure)

1-1- Montrer en utilisant la relation fondamentale de la dynamique de rotation autour d'un axe fixe , que l'équation différentielle du mouvement du pendule dans un référentiel galiléen lié à la Terre s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

1-2- Calculer la période propre T_o du pendule .
1-3- Écrire l'équation horaire du mouvement du pendule .
1-4- En appliquant la deuxième loi de Newton dans la base de Frenet , trouver l'expression de la tension du fil T à un instant t en fonction de m , g , θ , L et v la vitesse linéaire du pendule simple . Calculer la valeur de T à l'instant $t = \frac{T_o}{4}$.



2- Étude énergétique:
On fournie au pendule qui est immobile dans sa position d'équilibre stable une énergie cinétique de valeur $E_C = 264{,}6$ J , et il tourne dans le sens positif .
2-1- On choisi le plan horizontal passant par le point M_o comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur (voire figure) .
Écrire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_P du pendule à l'instant t en fonction de θ , m , L et g .
2-2- En se basant sur l'étude énergétique , déterminer la valeur maximale θ_{max} de l'abscisse angulaire .

EXERCICE 2

L'homme a utilisé la montre pour mesurer le temps depuis longtemps , et a inventé différents types de montres , comme la montre solaire , la montre à eau et le sablier ... jusqu'à ce Huygens fabriqua la première montre murale en 1657 .
Ce type de montres est basé sur une balançoire qu'on modélise dans cette étude par un pendule pesant effectuant des petites oscillations libres sans frottements .
Le pendule étudié est composé d'une barre homogène AB , sa masse m = 0,203 kg , sa longueur AB = L= 1,5 m , mobile dans un plan plan vertical autours d'un axe horizontal (Δ) fixe passant son extrémité A (figure 1).
On étudie dans un repère lié à un référentiel terrestre supposé galiléen .
On repère , à chaque instant t , la position du pendule par son abscisse angulaire θ .
On donne le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation (Δ) : $\frac{1}{3}.m.L^2$.
On admet dans le cas des petites oscillations que : $\sin\theta \approx \theta$ avec θ en radian .
On note g l'intensité de la pesanteur .
On écarte le pendule pesant de sa position d'équilibre stable d'un petit angle θ_m dans le sens positif et on le lâche sans vitesse initiale à instant pris comme origine des dates .

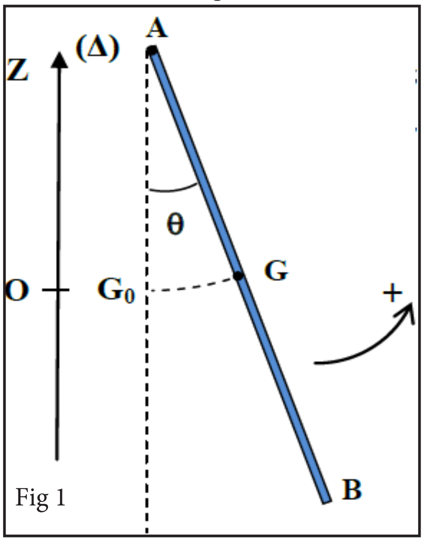
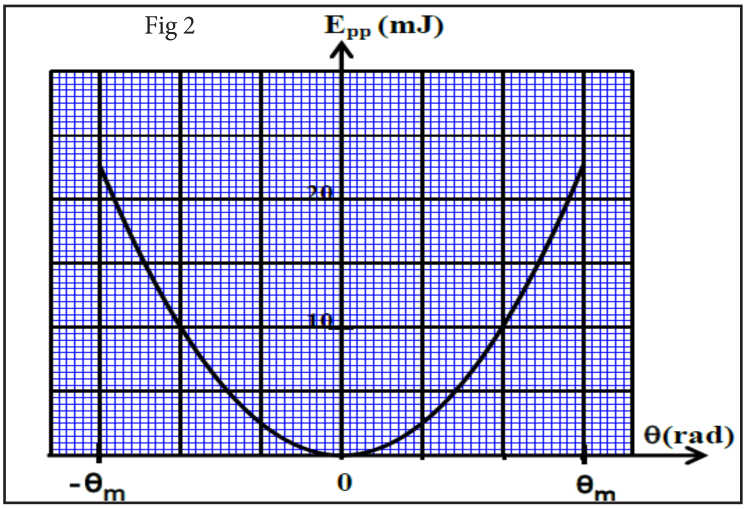


Fig 1

1- Étude dynamique du pendule pesant
1-1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique de rotation , établir l'équation différentielle du mouvement du pendule .
1-2- Déterminer la nature du mouvement du pendule pesant et écrire l'équation horaire θ(t) en fonction de t , θ_m et la période propre T_o .
1-3- Montrer que l'expression de la période propre de ce pendule est : $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
1-4- Calculer la longueur ℓ du pendule simple synchrone avec le pendule pesant étudié .
2- Étude énergétique du pendule pesant
On choisie le plan horizontal passant par G_o , la position du centre d'inertie G de la barre AB à l'équilibre stable , comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur ($E_{PP}(0) = 0$) .
La figure 2 représente les variations de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP}(\theta)$ du pendule étudié en fonction du temps dans l'intervalle$[-\theta_m , \theta_m]$.

Fig 2


En exploitant le diagramme d'énergie :
2-1- Déterminer la valeur de l'énergie mécanique E_m du pendule .
2-2- Trouver la valeur absolue de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du pendule au passage par la position d'abscisse angulaire $\theta = \frac{2}{3}.\theta_m$.

EXERCICE 3

Première partie : étude énergétique du mouvement d'un pendule simple
Pour étudier quelques lois physiques régissant le mouvement d'un pendule simple , qui est considéré comme un cas particulier du pendule pesant , une professeur et ses élèves ont utilisé un pendule simple constitué de :
-Fil inextensible de longueur L et de masse négligeable .
- Une bille de dimensions négligeables et de masse m = 0,1 kg .
- Caméra numérique et un dispositif informatique adéquat .
A l'instant t = 0 , un des élève a écarté la bille de sa position d'équilibre stable d'un angle petit θ_m et l'a libéré sans vitesse initiale . Une

élève a filmé la bille pendant son mouvement à l'aide de la caméra .
Le mouvement du pendule a lieu dans un plan vertical autour d'un axe horizontal (Δ) passant par l'extrémité O du fil .
θ représente l'abscisse angulaire du pendule à l'instant t .(Figure 2)

Données :
- Tous les frottements sont négligeables .
- L'intensité de la pesanteur : $g = 10\ m.s^{-2}$.
- On choisi le plan horizontal passant par la position de la bille à l'équilibre stable du pendule comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur E_{PP} .

L'étude est faite dans un référentielle terrestre supposé galiléen .
La professeur a traité les données du film enregistré à l'aide du dispositif informatique , et a obtenu les deux courbes représentées sur la figure 3 représentant les variations de l'abscisse angulaire θ et de l'énergie potentielle de pesanteur E_{PP} en fonction du temps .

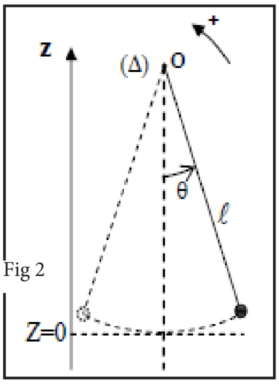
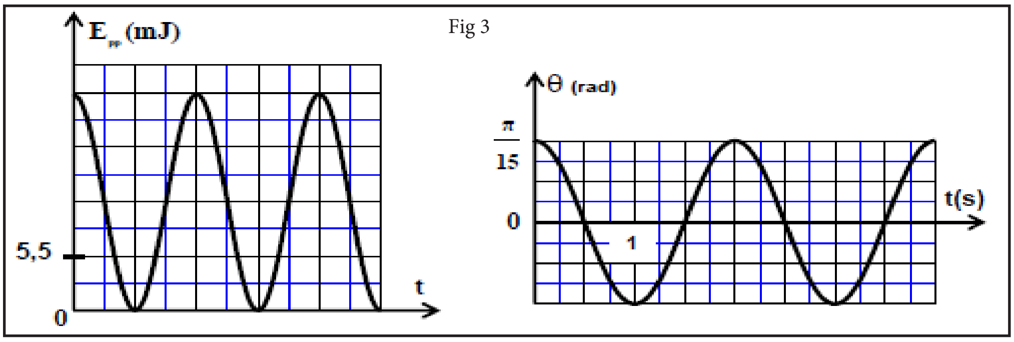


Fig 2

Fig 3



1- Déterminer graphiquement l'angle maximal θ_m et la période propre T_o .

2- Parmi les deux expressions suivantes : $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$ et $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, choisir l'expression juste de la période propre en se basant sur l'équation au dimensions .

3- Calculer la longueur L du pendule étudié .

4- En exploitant le diagramme d'énergie , déterminer :

4-1- L'énergie mécanique E_m du pendule simple .

4-2- La valeur absolue de la vitesse linéaire de la bille au moment de son passage par la position d'équilibre stable .

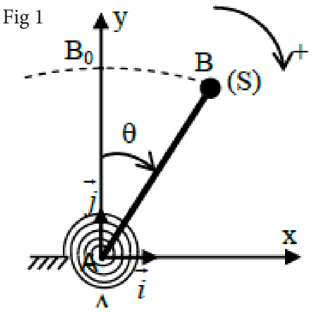
EXERCICE 4

Le gravimètre est un appareil qui permet de déterminer, avec une grande précision, la valeur deg ; valeur d'intensité du champ de pesanteur en un lieu donné.
Les domaines d'utilisation des gravimètres sont nombreux : la géologie, l'océanographie, la sismologie, l'étude spatiale, la prospection minière….etc.

On modélise un type de gravimètres par un système mécanique oscillant constitué de :
- une tige AB, de masse négligeable et de longueur L, pouvant tourner dans un plan vertical autour d'un axe fixe (Δ) horizontal passant par l'extrémité A ;
- un corps solide (S), de masse m et de dimensions négligeables, fixé à l'extrémité B de la tige ;
- un ressort spiral, de constante de torsion C, qui exerce sur la tige AB un couple de rappel de moment $M_C = -C.\theta$; où θ désigne l'angle que fait AB avec la verticale ascendante Ay. (figure1)

On étudie le mouvement de ce système mécanique dans un repère orthonormé $(A , \vec{i} , \vec{j})$ lié à un référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Fig 1



Données :
- masse du solide (S) : $m=5.10^{-2}$ kg ;
- longueur de la tige : $L=7.10^{-1}$ m ;
- constante de torsion du ressort spiral : $C=1,31 N.m.rad^{-1}$;
- expression du moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Δ) : $J_\Delta = m.L^2$;
- pour les angles faibles : $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ avec θ en radian .

On écarte le système mécanique de sa position d'équilibre vertical d'un angle petit max θ dans le sens positif puis on le lâche sans vitesse initiale à un instant t=0.
Le système est repéré, à chaque instant t, par son abscisse angulaire θ .
On néglige tous les frottements.

1- Étude dynamique

1-1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation autour d'un axe fixe, montrer que l'équation différentielle du mouvement du système étudié s'écrit, pour les faibles oscillations, sous la forme : $\ddot{\theta} + (\frac{C}{m.L^2} - \frac{g}{L}).\theta = 0$

1-2- En utilisant les équations aux dimensions, déterminer la dimension de l'expression $(\frac{C}{m.L^2} - \frac{g}{L})$.

1-3- Pour que la solution de l'équation différentielle précédente soit sous la forme : $\theta(t)= \theta_{max}.\cos(\frac{2\pi}{T}t +\varphi)$, il faut que la constante de torsion C soit supérieure à une valeur minimale C_{min} . Trouver l'expression de C_{min} en fonction de L , m et g .

1-4- La courbe de la figure 2 représente l'évolution de l'abscisse angulaire θ(t) dans le cas où $C > C_{min}$.

1-4-1- Déterminer la période T , l'amplitude θ_{max} et la phase à l'origine φ .

1-4-2- Trouver l'expression de l'intensité de pesanteur g en fonction de L , m, C et T . Calculer sa valeur . (on prend π=3,14).

2- Étude énergétique

Un système d'acquisition informatisé a permis de tracer la courbe de la figure 3, qui représente les variations de l'énergie cinétique C E du système étudié en fonction de l'abscisse angulaire θ dans le cas de faibles amplitudes.

On choisit le niveau horizontal passant par B_o comme état de référence pour l'énergie potentielle de pesanteur ($E_{pp} = 0$), et on choisit l'énergie potentielle de torsion nulle ($E_{pt} = 0$) pour $\theta = 0$.
En exploitant la courbe de la figure 3, déterminer :
2-1- la valeur de l'énergie mécanique E_m du système étudié.
2-2- la valeur de l'énergie potentielle E_p du système à la position $\theta_1 = 0{,}10$ rad .
2-3- la valeur absolue de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du système à l'instant de son passage par la position $\theta = 0$.

Fig 2

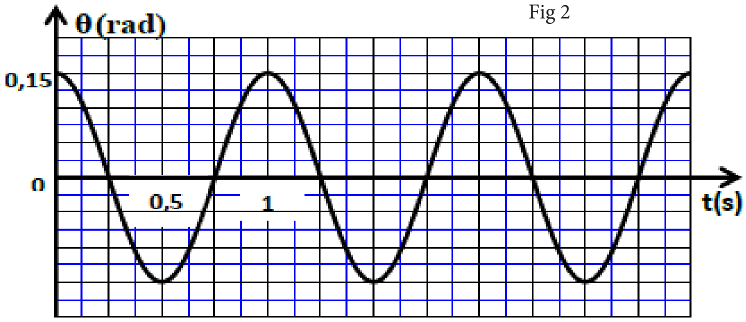
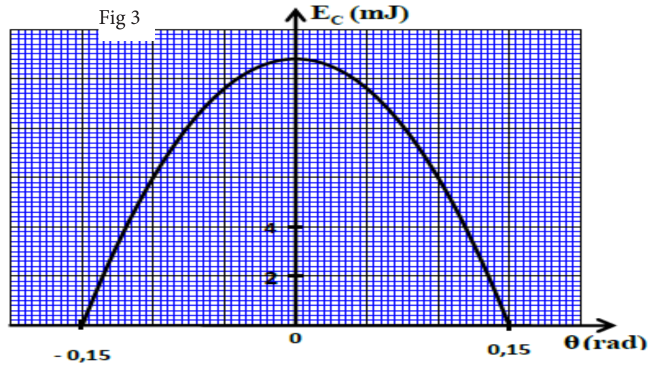


Fig 3



EXERCICE 5

Cette partie vise la détermination de l'intensité de la pesanteur , en un lieu donné, ainsi que quelques grandeurs qui sont liées au mouvement d'un pendule pesant.

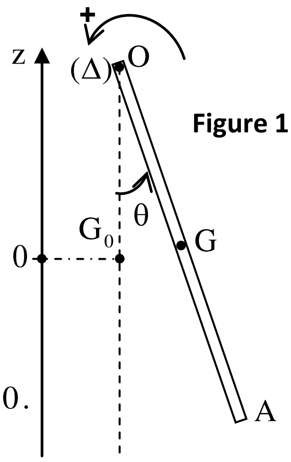


Figure 1

Un pendule pesant est constitué d'une tige homogène OA de masse m, de centre d'inertie G et de longueur L pouvant effectuer un mouvement de rotation dans un plan vertical autour d'un axe horizontal (Δ) passant par son extrémité O (figure 1). Soit J_Δ le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe (Δ) .
On étudie le mouvement du pendule dans un repère lié à un référentiel terrestre supposé galiléen.
On écarte la tige OA de sa position d'équilibre stable d'un petit angle θ_0 , dans le sens positif, puis on la lance avec une vitesse angulaire initiale à l'instant de date $t=0$.
On repère la position du pendule à un instant de date t par l'abscisse angulaire θ .Le centre G est confondu avec G_0 quand le pendule passe par sa position d'équilibre stable (figure 1).
On néglige tous les frottements et on choisit le plan horizontal passant par G_0 comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur $(E_{pp}=0)$.

Données : - La masse de la tige : $m=100\,g$; - La longueur de la tige : $L=0{,}53\,m$;
- L'expression du moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Δ) : $J_\Delta = \frac{1}{3} m.L^2$;
- Pour les petits angles : $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ où θ est exprimé en radian ; - On prendra : $\pi^2 = 10$.

1-Trouver l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du pendule pesant à un instant t, dans le cas des oscillations de faible amplitude, en fonction de θ , L , m et g intensité de la pesanteur.
2- Par une étude énergétique, montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2L}\theta = 0$.
3- La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme : $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ où T_0 est la période propre du pendule.
La courbe de la figure 2 représente l'évolution de l'énergie cinétique du pendule étudié au cours du temps.
3-1-Déterminer la valeur de l'intensité de pesanteur g .
3-2-Trouver la valeur de l'amplitude θ_m du mouvement.
3-3-Déterminer la valeur de φ .

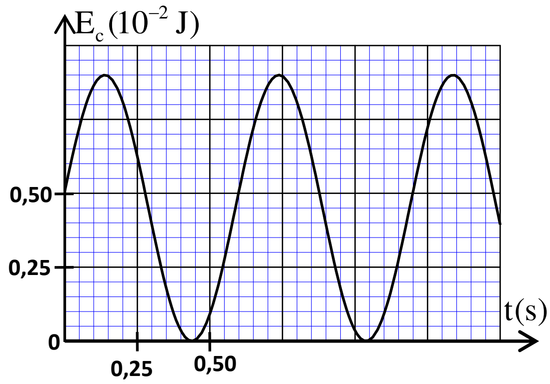


Figure 2

EXERCICE 6

L'objectif de cette partie est la détermination de la position du centre d'inertie G d'un système oscillant et son moment d'inertie J_Δ à l'aide d'une étude énergétique et dynamique .

Un pendule pesant de centre d'inertie G, est constitué d'une barre AB de masse $m_1 = 100g$ et d'un corps (C) de masse $m_2 = 300g$ fixé a l'extrémité B de la barre.

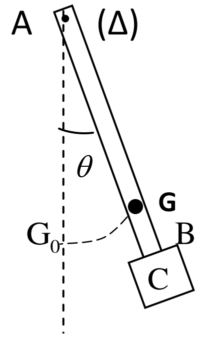


Fig2

Le pendule pesant peut tourner autour d'un axe fixe horizontal (Δ) passant par l'extrémité A (fig2).Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe (Δ) est J_Δ.

$AG = d$ est la distance entre le centre d'inertie et l'axe de rotation.

On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable d'un angle θ_m petit et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps $(t = 0s)$, le pendule effectue alors un mouvement oscillatoire autour de sa position d'équilibre.

On considère que tous les frottements sont négligeables et on choisit le plan Horizontal passant par le point G_0, position de G à l'équilibre stable, comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur $(E_{pp} = 0)$. On repère à chaque instant la position du pendule pesant par son abscisse angulaire θ formé par la barre et la ligne verticale passant par le point A , on note $\frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire du pendule pesant à un instant t.

La figure 3 représente la courbe de l'évolution de l'énergie cinétique E_c du pendule pesant en fonction du carré de l'abscisse angulaire θ^2.

on prend $\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $\sin(\theta) \approx \theta$ avec θ en radian. L'intensité de la pesanteur est $g = 9,8 m.s^{-2}$.

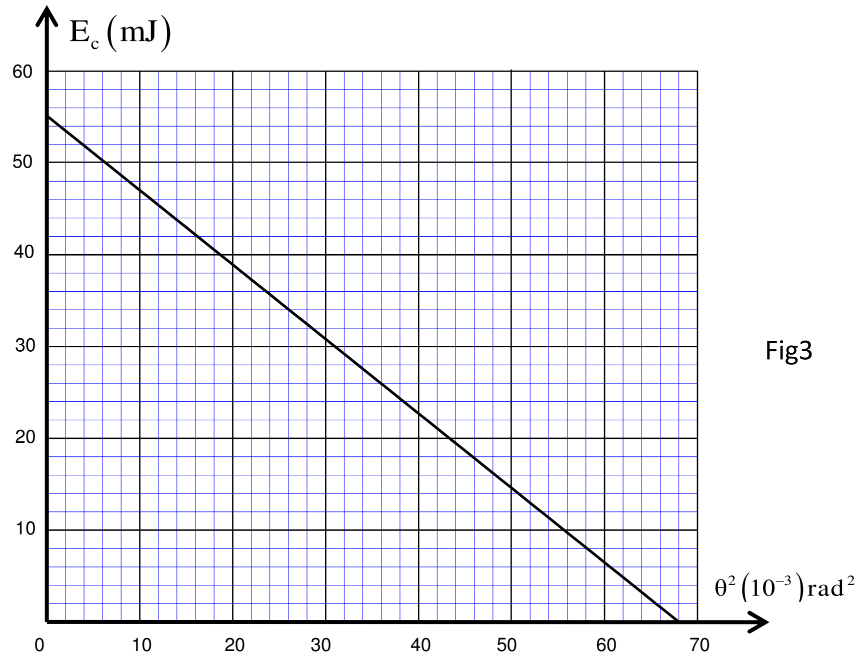


Fig3

1. Détermination de la position du centre d'inertie G **du système**

1-1 Soit E_m l'énergie mécanique du pendule pesant dans le cas de petites oscillations ;

Montrer que $\frac{E_m}{\theta_m^2} = \frac{(m_1 + m_2).g.d}{2}$.

1-2 A l'aide du graphe de la figure 3, déduire la valeur de d .

2. Détermination du moment d'inertie J_Δ

2-1 Trouver en appliquant la relation fondamentale de la dynamique, l'équation différentielle du mouvement du pendule pesant.

2-2 Trouver l'expression de la fréquence propre N_0 de ce pendule en fonction de J_Δ, m_1, g, m_2 et d pour que la solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme $\theta(t) = \theta_m \cos(2\pi N_0 t + \varphi)$.

2-3 Sachant que la valeur de la fréquence propre est $N_0 = 1Hz$. Calculer J_Δ.

EXERCICE 7

Le pendule pesant est un système mécanique qui peut effectuer un mouvement de rotation oscillatoire autour d'un axe fixe horizontal ne passant pas par son centre d'inertie; sa période propre dépend de l'accélération de la pesanteur .

L'objectif de cette partie est l'étude de l'effet de l'accélération de la pesanteur sur la période propre d'un pendule pesant dans le cas de faibles oscillations .

Le pendule pesant représenté sur la figure 1 est constitué d'un disque de masse m_1 , fixé à l'extrémité inferieur A d'une tige OA de masse m_2 avec $m_1 + m_2 = 200g$.

Le pendule pesant peut effectuer un mouvement de rotation oscillatoire autour d'un axe fixe (Δ) horizontal passant par l'extremité O de la tige.

Le centre d'inertie G du pendule pesant est situé sur la tige à une distance OG=d=50 cm de O.

Le moment d'inertie du pendule pesant par rapport à l'axe (Δ) est $J_\Delta = 9{,}8.10^{-2}$ kg.m². On néglige tous les frottements .

On prend pour les petits angles : $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $\sin\theta \approx \theta$ avec θ en radian . Et on prend $\pi^2 = 10$

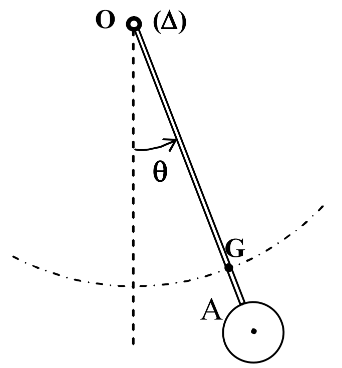


Figure 1

1- Au niveau de la mer où l'accélération de la pesanteur est $g_0 = 9{,}8$ m.s^{-2}, on écarte le pendule pesant de sa position d'équilibre stable d'un angle $\theta_0 = \frac{\pi}{18}$ rad et on le libère sans vitesse initiale à l'instant t=0. On repère à chaque instant la position du pendule pesant par l'abscisse angulaire θ mesurée à partir de sa position d'équilibre stable (figure 1).

1.1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique relative à la rotation du pendule pesant , déterminer l'équation différentielle que vérifie l'angle θ dans le cas de faibles oscillations .

1.2- Trouver, en fonction de J_Δ, d, m_1, m_2 et g_0 l'expression de la période propre T_0 du pendule pour que la solution de l'équation différentielle soit $\theta = \theta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$. Calculer T_0.

1.3- En appliquant la deuxième loi de Newton et en utilisant la base de Freinet $(G, \vec{u}, \vec{n})$ (figure 2) , trouver l'expression de l'intensité R de la force exercée par l'axe (Δ) sur le pendule pesant au moment de passage du pendule par sa position d'équilibre stable en fonction de m_1,m_2, d , g_0 , θ_0, et T_0. Calculer R.

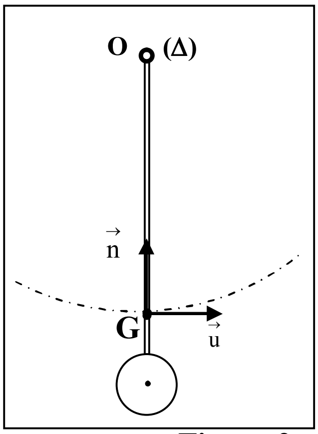


Figure 2

2- Dans une région montagneuse où l'accélération de la pesanteur est g=9,78 m.s^{-2}, la période propre du pendule pesant augmente de ΔT.

Pour corriger le décalage temporel Δt , on utilise un ressort spiral équivalent à un fil de torsion dont la constante de torsion est C .

On relie l'une des extrémités du ressort spiral à l'extrémité O de la tige et on fixe l'autre extrémité du ressort à un support fixe de telle façon que le ressort spiral soit non déformé lorsque le pendule pesant est dans sa position d'équilibre stable (figure3).

On choisit le niveau horizontal passant par G_0 centre d'inertie du pendule pesant dans sa position d'équilibre stable , comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur et la position dans laquelle le ressort spiral est non déformé , comme référence de l'énergie potentielle de torsion . le point G_0 correspond à l'origine du repère O'z orienté vers le haut (figure 3).

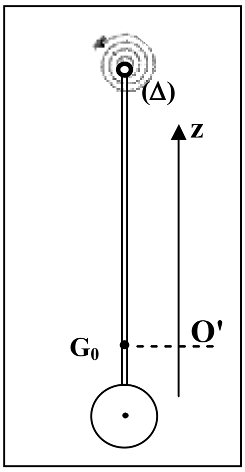


Figure 3

2.1- Montrer dans le cas de petites oscillations et à une date t , que l'énergie mécanique de l'oscillateur ainsi constitué s'écrit sous la forme : $E_m = a.\dot{\theta}^2 + b.\theta^2$ en précisant les expressions de a et de b en fonction des données utiles de l'exercice .

2.2- En déduire l'équation différentielle du mouvement que vérifie l'angle θ en fonction de a et b .

2.3- Trouver l'expression de la constante de torsion C qui convient à la correction du décalage temporel ΔT en fonction de m_1, m_2, d, g, et g_0 . Calculer C .

Aspects énergétiques

Pour sc math et sc physique.

I-Travail de la tension d'un ressort:

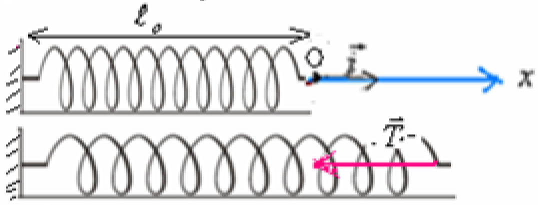
1) Travail d'une force constante lors d'un déplacement rectiligne:

Le travail d'une force constante entre deux points A et B est égale au produit scalaire du vecteur force $\vec{F}$ par le vecteur déplacement $\overrightarrow{AB}$.

$$W_{A \to B}\vec{F} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos(\widehat{\vec{F}.\overrightarrow{AB}})$$

2) Travail de la tension d'un ressort:

Considérons un ressort de longueur initiale ℓ_o et de constante de raideur K placé sur un plan horizontal comme l'indique la figure suivante:



La tension du ressort. $\vec{T} = -K.x.\vec{i}$ n'est pas une force constante.

Pour calculer le travail de cette force on doit considerer le travail élémentaire de cette force δW sur un déplacement infiniment petit $\vec{\delta\ell}$ sur lequel nous considérerons que la force est constante $\delta W = \vec{T}.\vec{\delta\ell}$ avec : $\vec{\delta\ell} = \delta x.\vec{i}$

donc : $\delta W = \vec{F}.\vec{\delta\ell} = -K.x.\vec{i}.\delta x.\vec{i} = -K.x..\delta x.$ d'où: $\delta W = -K.x..\delta x.$

Le travail total de la tension $\vec{T}$ du ressort lorsque son point d'application se déplace d'un point d'abscisse x_1 à un point d'abscisse x_2 est la somme des travaux élémentaires, on l'obtient en utilisant le calcul intégral on a donc : $dW = -K.x.dx.$

$$\Rightarrow \quad W_{M_1 \to M_2}\vec{T} = \int_{x_1}^{x_2} -K.x.dx = -K\int_{x_1}^{x_2} x.dx = K\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{2}.K(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2}K(x_1^2 - x_2^2)$$

Donc le travail de la tension du ressort lorsque son point d'application se déplace d'un point M_1d'abscisse x_1 à un point M_2 d'abscisse x_2 est donné par la relation suivante :

$$W_{T1 \to T2}\vec{T} = \frac{1}{2}.K.(x_1^2 - x_2^2) \quad (1)$$

I-Etude énergétique du pendule élastique:

1)Energie potentielle de élastique:

L'énergie potentielle élastique d'un pendule élastique est l'énergie qu'il possède grâce à la déformation du ressort, elle est donnée par la relation suivante: $E_{pe} = \frac{1}{2}.K.x^2 + C$

C: est une constante qui dépend du choix de l'état de référence de l'énergie potentielle élastique .
x : allongement du ressort (en mètre)
E_{pe} : énergie potentielle élastique en (J).

En considérant comme état de référence E_{pe}=0 lorsque x=0 la constante C=0 donc : $E_{pe} = \frac{1}{2}.K.x^2$

Remarque : La variation de l'énergie potentielle ne dépend pas de l'état de référence. En effet:

-dans la position x_1 on a : $E_{pe_1} = \frac{1}{2}.K.x_1^2 + C$

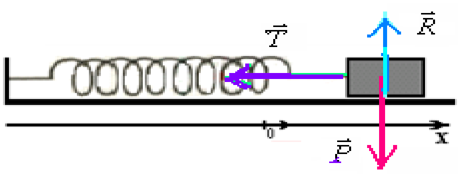
-dans la position x_2 on a : $E_{pe_2} = \frac{1}{2}.K.x_2^2 + C$

La variation de l'énergie potentielle $\Delta Ep = Ep_2 - Ep_1 = \frac{1}{2}k\ (x_2^2 - x_1^2)$ (2)

D'après (1) et (2) on a: $\boxed{W_{1 \to 2}\vec{T} = -\Delta Epe}$

2) Conservation de l'énergie mécanique:

Pendant les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique horizontal constitué d'un corps S de masse m et d'un ressort de constante de raideur K, appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur le corps S entre un point M_1d'abscisse x_1 à d'abscisse x_2 un point M_2 :



$\Delta Ec_{1 \to 2} = W_{1 \to 2}\vec{P} + W_{1 \to 2}\vec{R} + W_{1 \to 2}\vec{T}$ On a : $W_{1 \to 2}\vec{P} = 0$ et $W_{1 \to 2}\vec{R} = 0$ donc: $\Delta Ec_{1 \to 2} = W_{1 \to 2}\vec{T}$ or : $W_{1 \to 2}\vec{T} = -\Delta Epe_{1 \to 2}$

donc: $\Delta Ec_{1 \to 2} = -\Delta Epe_{1 \to 2} \Rightarrow Ec_2 - Ec_1 = -(Epe_2 - Epe_1) \Rightarrow Ec_2 - Ec_1 = Epe_1 - Epe_2$

$\Rightarrow \qquad Ec_2 + Ec_2 = Ec_1 + Epe_1$ d'où: $\qquad Em_2 = Em_1$ donc l'énergie mécanique est constante.

3 Détermination de l'équation différentielle par étude énergétique:

Si les frottement sont négligeables , l'énergie mécanique de l'oscillateur est constante : $E_m = C^{te}$ donc: $\dfrac{dE_m}{dt} = 0$

Or : $E_m = E_c + E_{pe} = \dfrac{1}{2}.m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}.K.x^2$ donc: $\dfrac{dE_m}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\dfrac{1}{2}.m.\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}.K.x^2) = 0 \Rightarrow$

$\dfrac{1}{2}.m.(2.\dot{x}.\ddot{x} + \dfrac{1}{2}.K.(2.x\dot{x}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}.(m.\ddot{x} + K.x) = 0$ d'où l'équation différentielle: $m.\ddot{x} + K.x = 0$

4) Expression de l'énergie mécanique du pendule élastique:

La solution de l'équation différentielle: $m.\ddot{x} + K.x = 0$ est : $x = x_m \cos(\dfrac{2.\pi}{T_o}.t + \varphi)$ avec : $T_o = 2.\pi.\sqrt{\dfrac{m}{K}}$

donc: $v = \dot{x} = -x_m.\dfrac{2\pi}{T_o}.\sin(\dfrac{2.\pi}{T_o}t + \varphi)$

$$E_m = E_{pt} + E_C = \frac{1}{2}K.x^2 + \frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}K.x_m^2.\cos^2(\frac{2.\pi}{T_o}.t + \varphi) + \frac{1}{2}.m.x_m^2\frac{4\pi^2}{T_o^2}\sin^2(\omega_o.t + \varphi) \text{ avec: } T_o^2 = \frac{4.\pi^2 m}{K}$$

$$\text{donc : } E_m = \frac{1}{2}K.x_m^2.\cos^2(\frac{2.\pi}{T_o}.t + \varphi) + \frac{1}{2}\cancel{m}.x_m^2\frac{\cancel{4.\pi^2}.K}{\cancel{4.\pi^2 m}}\sin^2(\omega_o.t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2}K.x_m^2.\cos^2(\frac{2.\pi}{T_o}.t + \varphi) + \frac{1}{2}.K.x_m^2\sin^2(\omega_o.t + \varphi) = \frac{1}{2}K.x_m^2\left[\cos^2(\omega_o.t + \varphi) + \sin^2(\omega_o.t + \varphi)\right] = \frac{1}{2}.K.x_m^2$$

5) Diagramme énergétiques :

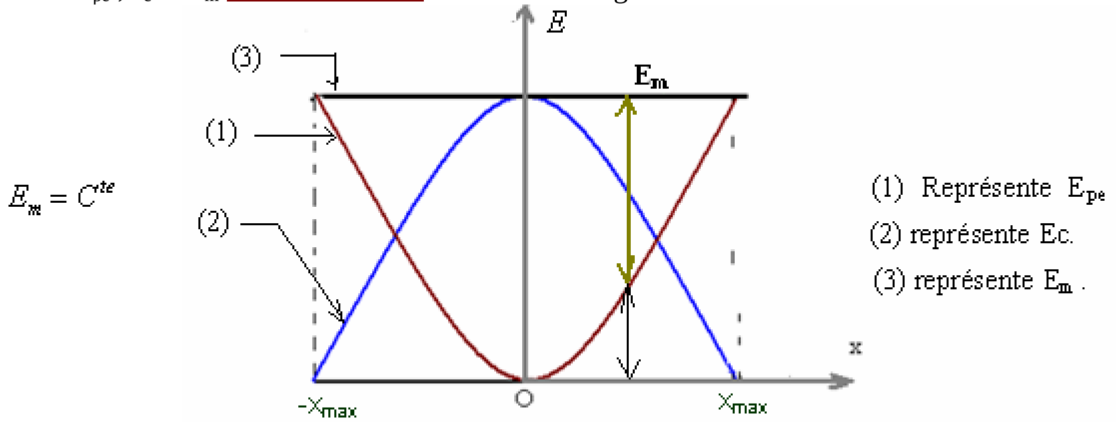
a) Cas des oscillations sans frottements :

Dans le cas des oscillations sans frottements l'énergie mécanique de l'oscillateur mécanique est constante.

$$E_m = \frac{1}{2}.K.x_m^2 = \frac{1}{2}.m.v_{max}^2 = C^{te}$$

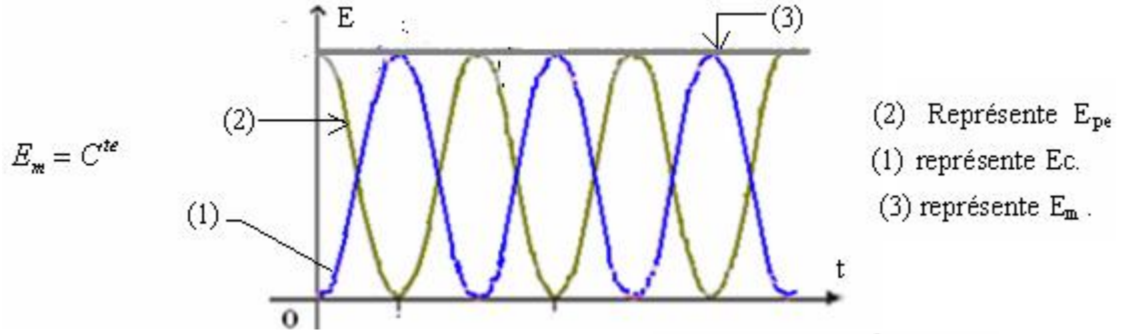
En considérant comme état de référence E_{pe}=0 lorsque x=0 on a C=0 donc : $E_{pe} = \dfrac{1}{2}.K.x^2$

En représentant la variation E_{pe} ,E_c et E_m en fonction de x on obtient le diagramme suivant:



A chaque instant on a ; $E_m = E_C + E_{pe}$ donc : $E_c = E_m - E_{pe}$

Et en représentant la variation de E_{pe} ,E_c et E_m en fonction du temps on obtient le diagramme suivant:

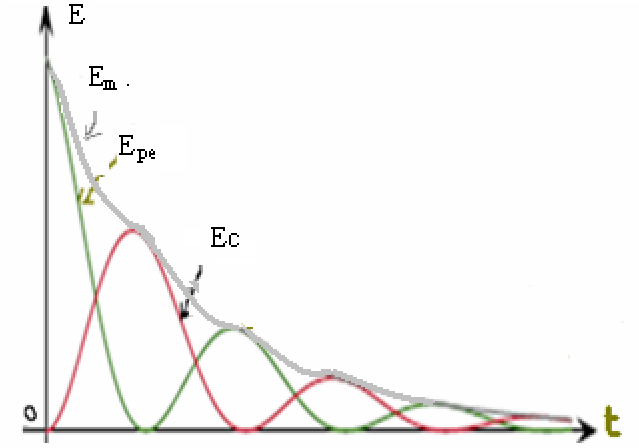


Car: $E_{pe} = \dfrac{1}{2}.K.x^2$ avec: $x = x_m \cos(\dfrac{2.\pi}{T_o}.t + \varphi)$ donc: $E_{pe} = \dfrac{1}{2}K.x_m^2.\cos^2(\dfrac{2.\pi}{T_o}.t + \varphi)$

b) Cas des oscillations avec frottements :

Dans le cas des oscillations avec frottements l'énergie mécanique de l'oscillateur mécanique diminue jusqu'à ce qu'elle s'annule.

Diagramme énergétique.:



II-Etude énergétique d'un pendule de torsion:

1) Energie cinétique du système:

L'énergie cinétique du pendule de torsion est égale à l'énergie cinétique de la tige qui est donnée par l'expression suivante:

$Ec = \frac{1}{2}.J_{\Delta}.\dot{\theta}^2$ J_{Δ} : est le moment d'inertie de la tige $\dot{\theta}$: est la vitesse angulaire . ,

2) Energie potentielle de torsion:

L'énergie potentielle de torsion est donnée par la la relation suivante: $E_{pt} = \frac{1}{2}.C.\theta^2 + C^{te}$

C^{te}: est une constante qui dépend du choix de l'état de référence de l'énergie potentielle de torsion .

En considérant comme état de référence $E_{pt}=0$ lorsque: $\theta = 0$ donc $E_{pt} = \frac{1}{2}.C.\theta^2$ la constante C=0

3) Energie mécanique du pendule de torsion:

L'énergie mécanique du pendule de torsion est la somme de son énergie cinétique et son énergie potentielle de torsion.

$$E_m = E_c + E_{pe}$$

En considérant comme état de référence $E_{pt}=0$ lorsque $\theta = 0$, l'énergie mécanique du pendule de torsion s'écrit:

$$E_m = \frac{1}{2}J_{\Delta}.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.C.\theta^2$$

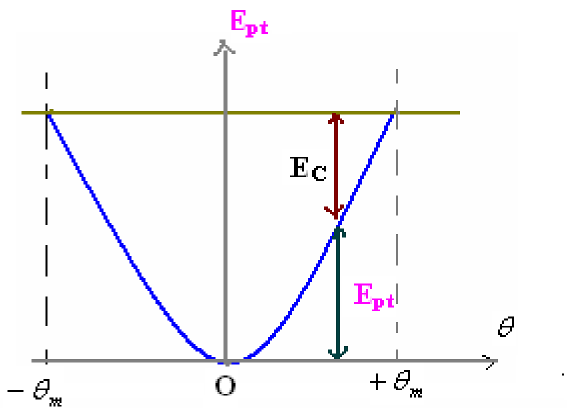
Si les frottements sont négligeables, l'énergie mécanique de l'oscillateur est constante : $\frac{dE_m}{dt} = 0$ donc: $E_m = C^{te}$

Or : $E_m = E_c + E_p. = \frac{1}{2}.J_{\Delta}.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.C.\theta^2$ donc: $\frac{dE_M}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}.J_{\Delta}.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.C.\theta^2) = 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{2}.J_{\Delta}(2.\dot{\theta}.\frac{d\dot{\theta}}{dt}) + \frac{1}{2}.C.(2.\theta.\frac{d\theta}{dt}) = 0 \Rightarrow J_{\Delta}.\dot{\theta}.\ddot{\theta} + C.\theta.\dot{\theta} = 0$ d'où: $J_{\Delta}.\ddot{\theta} + C.\theta = 0$ $\Rightarrow$ équation différentielle.

4) Diagramme énergétiques :

En considérant comme état de référence $E_{pt}=0$ lorsque $\theta = 0$, la constante C=0 donc: $E_{pt} = \frac{1}{2}.C.\theta^2$



III-Etude énergétique du pendule pesant:

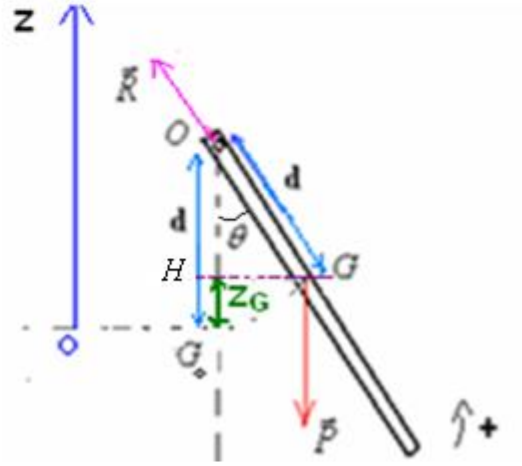
1) Energie cinétique du système:

L'énergie cinétique du pendule pesant est: $Ec = \frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2$

2) Energie potentielle de pesanteur:

L'énergie potentielle de pesanteur du pendule pesant est : $E_{pp} = m.gz + C^{te}$

En considérant comme état de référence $E_{pp}=0$ lorsque $z = 0$ la constante C=0 donc: $E_{pp} = m.g.z$



Lorsque le pendule pesant est incliné d'un angle θ , son énergie potentielle de pesanteur est : $E_{pp} = m.gz_G$

$z_G = d - OH = d - d\cos\theta = d(1-\cos\theta) \Rightarrow$ $E_{pp} = m.gd(1-\cos\theta)$ avec : $-\theta_m \leq \theta \leq +\theta_m$

donc pour : $\cos\theta = -1$ L'énergie potentielle de pesanteur est maximale : $E_{ppmax}=2.m.g.d$

On a deux cas possibles:

- Si $E_m > 2mgd$, l'énergie cinétique du système ne s'annule pas et le système se met à tourner sans arrêt et ce n'est pas un oscillateur mécanique.

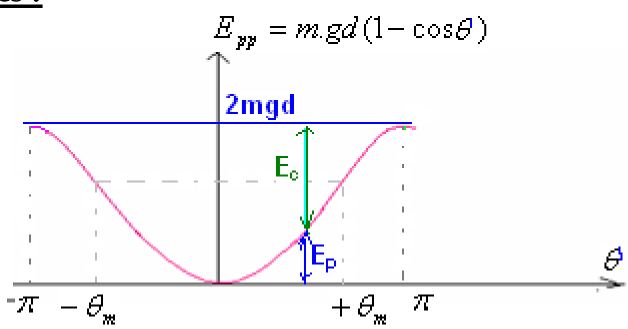
-Si $E_m < 2mgd$ l'énergie cinétique du système ne s'annule aux positions $\theta = \pm\theta_m$ et il oscille de façon périodique.

3) Energie mécanique du pendule pesant:

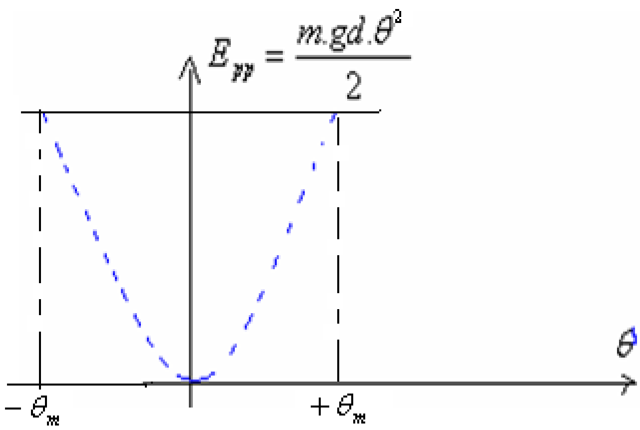
En considérant comme état de référence $E_{pp}=0$ lorsque $z = 0$, L'énergie mécanique du système :

$$E_m = Ec + E_{pp} = \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2 + mgz$$

4) Diagramme énergétiques :



Pour les petites oscillations $\theta \leq 15°$ $1-\cos\theta = \frac{\theta^2}{2}$ on peut écrire par approximation : $E_{pp} = \frac{m.gd.\theta^2}{2}$ dans ce cas on a:



Aspects énergétiques : exercices

Exercice 1 :

1. Choisir la bonne réponse :
   (a) Le travail de la force exercée par un opérateur sur l'extrémité d'un ressort qui se déplace de A à B est :
   (a) $W(\overrightarrow{F_{op}}) = \frac{1}{2}k\,(x_B^2 - x_A^2)$ (b) $w(\overrightarrow{F_{op}}) = \frac{1}{2}k\,(x_A^2 - x_B^2)$ (c) $w(\overrightarrow{F_{op}}) = -\frac{1}{2}k\,(x_B^2 - x_A^2)$

   (b) La période de l'énergie cinétique $E_c(t)$ d'un pendule élastique de période propre T_0 est égal à :
   (a) T_0 (b) $\frac{T_0}{2}$ (c) $2T_0$

   (c) En présence de frottements , l'énergie mécanique d'un oscillateur :
   (a) croit (b) décroît (c) reste constante (d) est nulle

   (d) L'énergie mécanique d'un pendule de torsion diminue à cause du :
   (a) couple de rappel (b)frottement (c) moment d'inertie du pendule

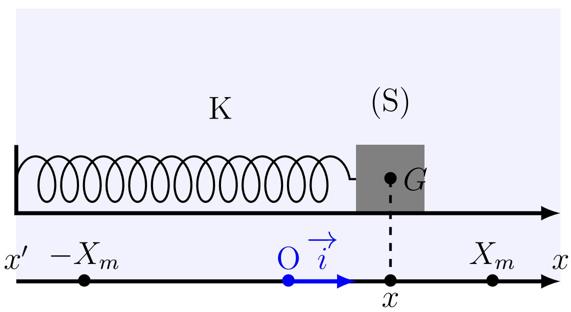
Exercice 2 :

Une balle de flipper de masse $m = 55g$ est propulsée par un ressort de constante de raideur $K = 14N/m$ et de longueur $l_0 = 12cm$.

1. Avant de lancer, le ressort est comprimé et sa longueur est égale à $l_0/2$. Calculer , dans ce cas , l'énergie potentielle élastique E_e emmagasinée par le ressort .
2. Lors du lancer , le ressort se détend et communique à la balle la totalité de l'énergie stockée . Sous quelle forme la balle acquiert-elle cette énergie ?
3. En déduire la vitesse maximale de la balle lors de sa propulsion .

Exercice 3 :

On considère le système mécanique (ressort + solide) de la figure ci-contre ,où la constante de raideur $k = 10N/m$ et $m = 200g$ la masse du solide .Lorsqu'on écarte le solide de sa position d'équilibre de 5cm , puis on l'abandonne sans vitesse initiale ,le système peut osciller entre deux positions A et B d'abscisses X_m et $-X_m$.



L'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G du solide est :

$$x(t) = X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

1. Déterminer les abscisses des postions des points où la vitesse est maximale et nulles .

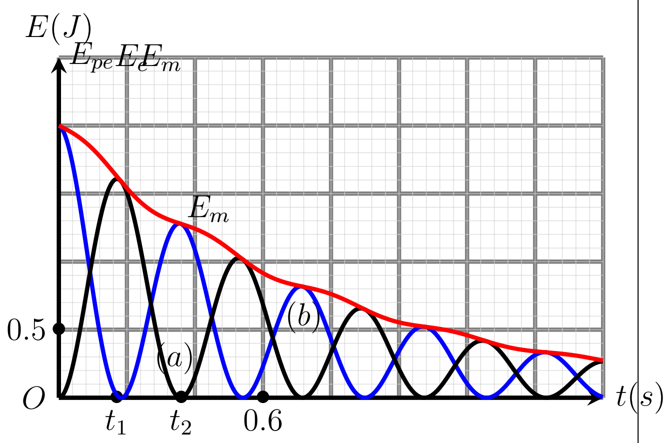
2. Écrire l'expression de l'énergie cinétique $E_c(t)$ du système au cours de son mouvement .
3. Montrer que l'énergie cinétique peut s'écrire sous la forme suivante :

$$E_c(t) = \frac{1}{2}kX_m^2\left(1 - cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0^2}\right)\right)$$

4. En déduire l'expression de l'énergie cinétique en fonction de k,X_m et x
5. Déterminer les abscisse des positions des points où l'énergie cinétique est maximale et nulle . Ce résultat saccorde-t-il avec ceux de la question 2 ? Calculer ces valeurs .
6. L'expression trouvée dans la question 4 est la différence entre deux grandeurs énergétiques , l'une dépend de x et l'autre est constante , à partir de la loi de conservation d'énergie , donner le nom de ces deux grandeurs énergétique.

Exercice 4 :

Un pendule élastique est constitué d'un solide (S) de masse $m = 250g$ fixé à un ressort à spires non jointives , de masse négligeable et de raideur $k = 10N/m$. Le solide peut glisser en effectuant un mouvement oscillatoire autour de sa position d'équilibre le long d'une tige horizontale . On étudie le mouvement du centre d'inertie G du solide sur l'axe Ox d'un repère orthonormé lié à un référentielle terrestre supposé Galiléen $\mathscr{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



La position de G est repérée par l'abscisse x.L'origine O du repère coïncide avec la position G_0 de G à l'équilibre. Les forces de frottement sont modélisées par une force unique $\vec{f} = -\mu.\vec{v}$ où μ est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de G .

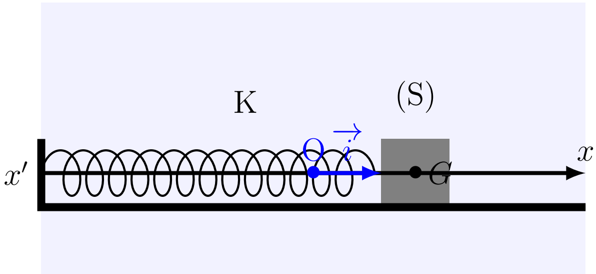
1. En utilisant le document 1 , déterminer la pseudo -periodique T des oscillations , la comparer à la propre T_0
2. Que représente les courbes (a) et (b) dans le document 1 .
3. Justifier la non conservation de l'énergie mécanique E_m de l'oscillateur .
4. (a) Quelle est la vitesse de G aux dates t_1 et t_2 ? Justifier
   (b) En déduire l'intensité f de la force de frottement à ces dates .
   (c) Justifier la forme de la courbe E_m

Exercice 5 :

Tous système mécanique oscillatoire peut effectue un mouvement de va et vient autour de son position d'équilibre stable .

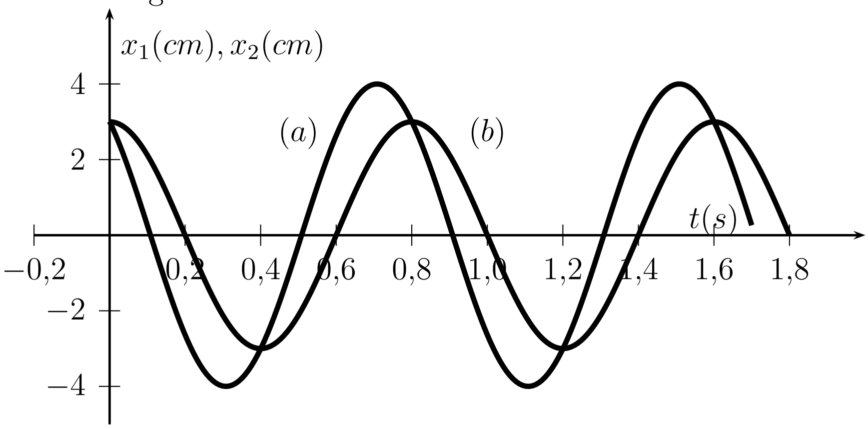
Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse m ,fixé à l'une des extrémités d'un ressort à spires non jointives , de masse négligeable et de constante de raideur k . L'autre extrémité est fixé à un support fixe (voir figure 1) .

À l'équilibre , le centre d'inertie G coïncide avec O l'origine de repère Ox lié au référentielle terrestre supposé Galiléen $\mathscr{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre dans le sens positif , jusqu'à ce que G soit confondu avec un point A distant de d du point O et on considère les deux cas suivants :



* Première cas : on abandonne le solide (S) à partir du point A , sans vitesse initiale , à l'instant $t = 0$
deuxième cas : on lance le solide (S) du point A dans le sens négatif , avec une vitesse $\vec{v_A}$, à l'instant $t = 0$. Dans les deux cas le système effectue un mouvement oscillatoire autour de sa position déquilibre O .

1. Établir l'équation différentielle du mouvement qui vérifie l'abscisse du centre d'inertie G .
2. Déterminer l'expression littérale de la période propre T_0 de l'oscillateur pour que $x(t) = x_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ soit une solution de cette équation différentielle .
3. À l'aide d'un système convenable , on peut obtenir les courbes d'évolution de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ du centre d'inertie du solide (S) , successivement , dans les deux cas précédentes voir la figure ci dessus :



   Préciser , en justifiant votre réponse , la courbe correspondant au mouvement du système oscillatoire dans la première cas .
4. On considère le système oscillatoire dans la deuxième cas , on note x_{2m} l'amplitude de son mouvement et φ_2 sa phase à l'origine des dates .
   (a) À partir de la représentation graphique , déterminer la valeur de d et celle de x_{2m}
   (b) En appliquant la conservation de l'énergie mécanique du système , montrer que l'amplitude x_{2m} peut s'exprimer par la relation suivante :
   $$x_{2m} = \sqrt{\frac{mv_A^2}{k} + d^2}$$
   (c) Trouver l'expression de $tan\varphi_2$ en fonction de d et x_{2m}

Exercice 6 : étude énergétique d'un pendule de torsion

Un pendule de torsion est constitué par disque (D)homogène de rayon $r = 10cm$ horizontale suspendue en son centre O à l'extrémité inférieure d'un fil métallique de masse négligeable et de constante de torsion C dont lextrémité supérieure est relié à un support fixe. Le disque peut donc tourner autour de laxe (Δ) matérialisé par le fil. Cet axe vertical est orienté vers le haut. Le fil exerce sur la barre un couple mécanique de rappel de torsion dont son moment par rapport à Δ est $-C\theta$ où θ est langle de torsion et C la constante de torsion du fil.
Le système étant au repos , on fait tourner le système d'un angle θ_m de sa position d'équilibre $\theta = 0$ et l'abandonne sans vitesse initiale . le système effectue un mouvement oscillatoire autour de l'axe Δ .
Le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe Δ est $J_\Delta = 9 \times 10^{-3} kg.m^2$.
On considère la position d'équilibre comme un état de référence de l'énergie potentielle de torsion $E_{pt} = 0$.

1. À partir d'une étude énergétique , établir l'équation différentielle du mouvement du disque .
2. La courbe de la figure (2) représente la variation de l'accélération angulaire du disque en fonction de l'abscisse angulaire $\theta(t)$. Déterminer , à partir de la courbe , la valeur de l'amplitude du mouvement θ_m, la période propre T_0 du mouvement de l'oscillatoire . En déduire la valeur de la constante de torsion du fil C
3. Calculer l'énergie mécanique de ce système . On prend $\pi^2 \approx 10$

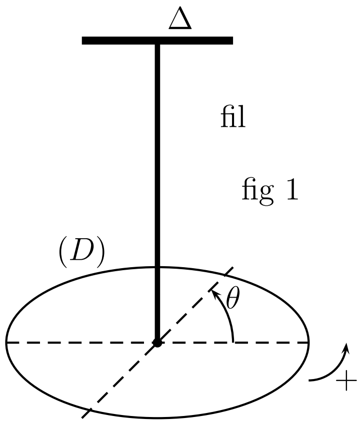


fig 1

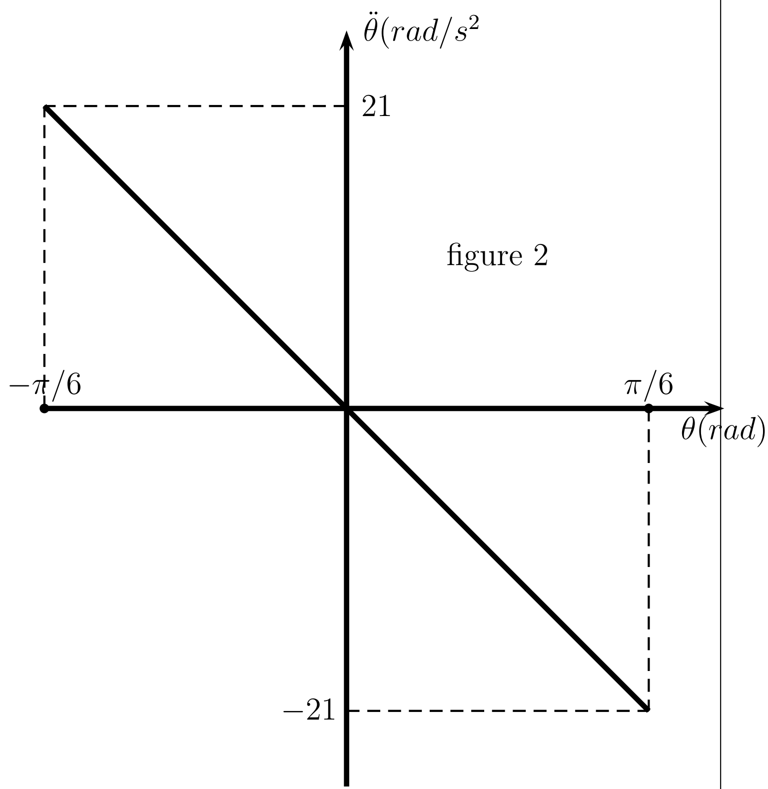


figure 2

Exercice 7 : Pendule pesant

On considère un pendule pesant effectuant des oscillations libres avec des frottement négligeables . Le pendule étudié est une tige homogène AB , de masse m et de longueur

$AB = l = 60,0cm$, peut tourner dans un plan vertical autour d'un axe horizontal (Δ) fixe et passe par son extrémité A . (voir figure)
Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Δ) est $J_\Delta = \frac{1}{3}ml^2$.
On étudie le mouvement du pendule dans un repère lié au référentielle terrestre supposé comme Galiléen . On repère , à chaque instant la position du pendule par l'abscisse angulaire θ , c'est l'angle que forme la tige avec la normale passant par le point G_0 . On choisit $E_{pp} = 0$ dans le plan horizontal passant par G à l'équilibre .
On admet que dans le cas des petites oscillations on a $cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ avec θ en radian et on prend $g = 9,80m/s^2$

1. L'équation différentielle du mouvement du pendule :

   (a) Montrer que l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} de la tige peut s'écrire sous la forme suivante :

   $$E_{pp} = mg\frac{l}{2}(1 - cos\theta)$$

   (b) Écrire dans le cas des petites oscillations , l'expression de l'énergie mécanique E_m de la tige à l'instant t , en fonction de m, l, g , θ et $\frac{d\theta}{dt}$.

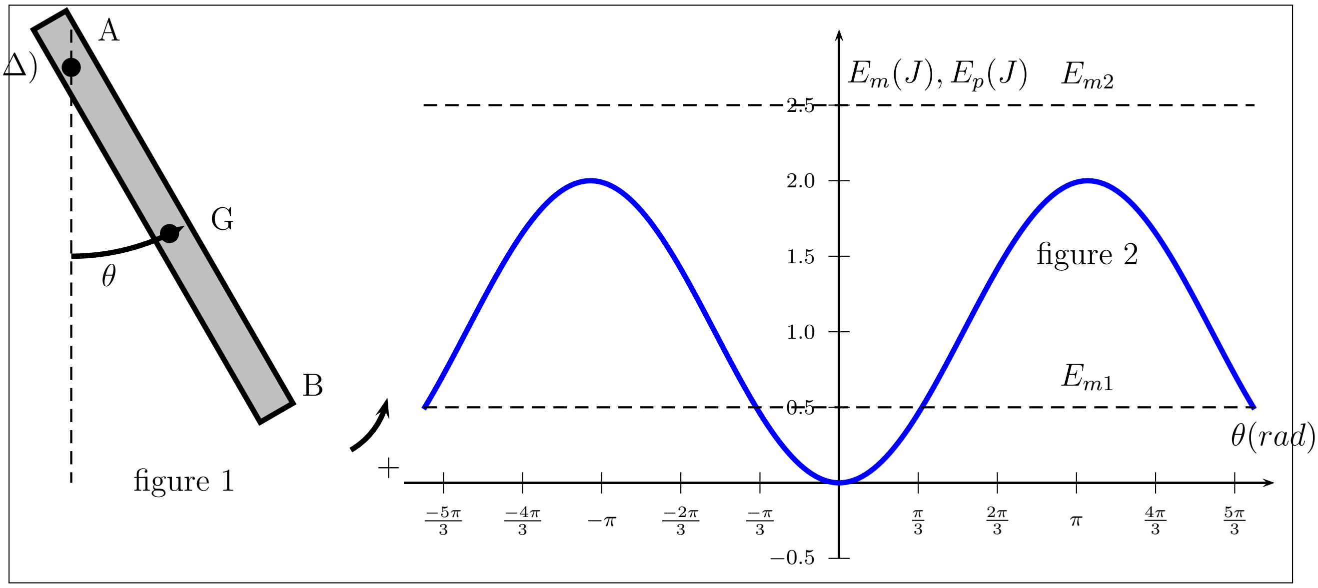
   (c) En déduire l'équation différentielle du mouvement qui vérifie l'abscisse angulaire θ dans le cas des petites oscillations .

2. Étude énergétique
   À partir de la position d'équilibre stable , on lance la tige avec une vitesse initiale qui lui fournit une énergie mécanique E_m . Le graphe de la figure 2 donne l'évolution de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} et l'énergie mécanique E_m de la tige AB dans deux expérience différentes de tel façon que dans chaque cas on lance la tige AB de sa position d'équilibre stable avec une vitesse initiale donnée où elle reçoit deux énergies mécaniques différentes .
   Dans l'expérience 1 : $E_m = E_{m1}$
   Dans la deuxième expérience : $E_m = E_{m2}$

   (a) En utilisant le graphe de la figure (2) , déterminer la nature du mouvement de la tige AB dans chaque expérience .

   (b) déterminer , graphiquement , la valeur maximale de l'abscisse angulaire du pendule dans l'expérience 1 . En déduire la masse de la tige .

   (c) Au cours de l'expérience 2 , l'énergie cinétique de la tige varie entre deux valeurs $E_{c,min}$ et $E_{c,max}$? déterminer ces deux valeurs .

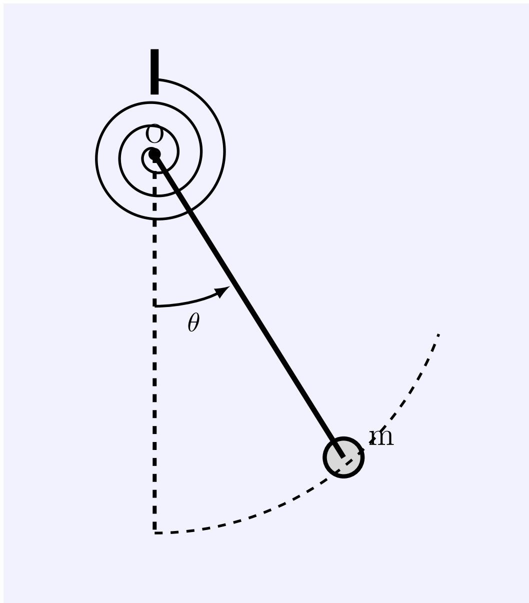


Exercice 8 :

Une tige OB de masse négligeable , porte un solide pratiquement ponctuel à son extrémité B :

$$OB = b = 20cm$$

Elle peut osciller dans un plan vertical autour d'un axe horizontal passant par O , perpendiculairement au plan de la figure . Elle est soumise à l'action du champs de pesanteur et à celle d'un ressort spiral dont la constante de torsion est C . (l'action du ressort spiral est la même que celle d'un fil de torsion ayant la constante de torsion C)
Initialement , la tige est immobile , verticale , et le ressort spiral est détendu .



On considère , à chaque instant l'élongation angulaire de la tige est θ et le plan horizontal passant par son centre d'inertie G_0 comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur ($E_{pp} = 0$) et lorsque le ressort est détendu est l'état de référence de l'énergie potentielle de torsion $E_{pt} = 0$.
Le moment d'inertie du système est $J_\Delta = mb^2$.

1. Déterminer l'énergie mécanique reçu par le système (ressort spiral + tige +Terre) quand la tige est écartée de l'angle α de sa position d'équilibre et maintenue immobile .
2. On écarte la tige de sa position d'équilibre d'un angle θ_m et on l'abandonne sans vitesse initiale . Montrer que l'énergie mécanique du système à un instant donné est :

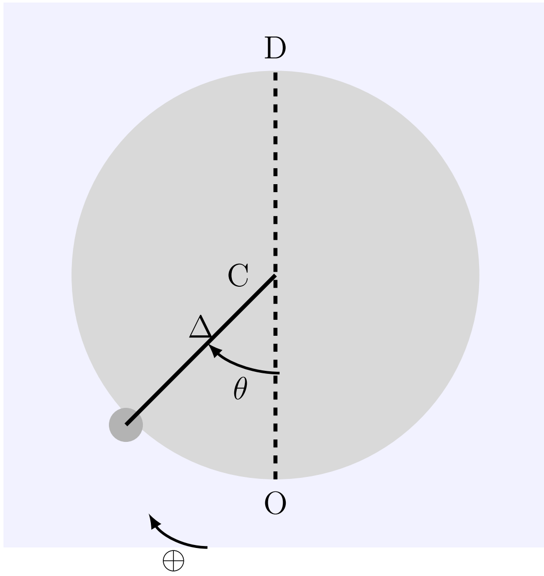
$$E_m = mgb(1 - cos\theta) + \frac{1}{2}C\theta^2 + \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2$$

3. On suppose l'angle θ petit , ce qui permet d'écrire en première approximation $cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$.

Déduire des résultats précédents l'équation différentielle du mouvement et la période des petites oscillations .

Exercice 9 :

On considère un disque (D) homogène de masse $M = 0,40kg$ et de rayon $r = 0,1m$ qui peut tourner sans frottement autour d'un axe fixe (Δ) horizontal et perpendiculaire au plan vertical du disque (D) et qui passe par son centre d'inertie.
Le moment d'inertie du disque par rapport à (Δ) est $J_\Delta = \frac{1}{2}Mr^2$. On fixe en un point A de la périphérie du disque un corps solide (B) de dimension négligeable et de masse $m = M/4$.
Le moment d'inertie du système (S_1)=(disque (D) + masse B) par rapport à l'axe (Δ) est $J = J_\Delta + mr^2$.



1. On écarte le système (S_1) à partir de sa position d'équilibre stable d'un faible angle θ_1 en sens positif et on l'abandonne sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des dates .

   À chaque instant on repère la position de corps B par l'abscisse angulaire $\theta = \widehat{CA, CO}$. Voir figure .

   (a) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique , montrer que l'équation différentielle du mouvement du système (S_1) est la suivante :

   $$\ddot{\theta} + \frac{g}{3r}\theta = 0$$

   avec g l'intensité de pesanteur .

   (b) la solution de cet équation différentielle est de la forme suivante : $\theta(t) = \theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}T + \varphi\right)$.
   Déterminer l'expression de la période propre du mouvement . et calculer sa valeur ; On donne $g = 10m/s^2$

   (c) Écrire l'équation horaire du mouvement en fonction de θ_1 et t .

2. On prend le plan horizontal passant par O comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur pour le système S_1, $E_{pp} = 0$.

   (a) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du système en fonction de t, T_0, g, θ_1,r, et m . on prend en considération l'approximation suivante : $1 - cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2}$.

   (b) Montrer que l'expression de l'énergie cinétique du système s'écrit de la forme suivante : $E_c = \frac{3}{2}mv^2$ où v est la vitesse linéaire du corps solide B à l'instant t .

(c) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de g, θ_1, r, et m

(d) En déduire la valeur de θ_1 sachant que la valeur maximale de l'énergie cinétique E_c du système est $E_{cmax} = 1,23 \times 10^{-3} J$

Exercice 10 :

Un oscillateur harmonique est un oscillateur idéal , on décrit son évolution au cours du temps par une fonction sinusoïdale , sa fréquence ne dépend que des caractéristiques du système mécanique . L'importance de ce modèle c'est qu'il nous permet de décrire l'évolution d'un système mécanique oscillatoire autour de sa position d'équilibre .

On considère un ressort de constante de raideur K ,de spires non jointives et de masse négligeable suspendu à un support fixe . On suspend dans l'autre extrémité libre de ce ressort un corps solide (S) de masse (m) . Soit Δl_0 l'allongement du ressort lorsque le solide (S) est en équilibre .

On repère la position (S) par un axe Oy orienté vers le haut et d'origine confondu avec avec la position du centre d'inertie du corps (S) à l'équilibre .

Données : $\Delta l_0 = 10,0 cm$; l'intensité de pesanteur $g = 9,81 N/kg$.

I. Étude dynamique On écarte (S) verticalement vers le bas d'une distance d ($d < \Delta l_0$) et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$ on le choisit comme origine des dates . Le solide effectue des oscillations verticales autour de sa position d'équilibre .

1. Déterminer à l'équilibre l'expression de K en fonction de m, g , et Δl_0 ;
2. En appliquant la deuxième loi de Newton , montrer que l'équation différentielle qui vérifie l'abscisse y s'écrit sous la forme suivante :
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{K}{m} y = 0$$
3. La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme :
$$y = y_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$
? Déterminer les valeurs de φ et T_0.
4. Soit F l'intensité de la tension du ressort , choisir la réponse juste :
Lorsque l'abscisse $y > 0$, on a
(a) $F > mg$ (b) $F = mg$ (c) $F < mg$

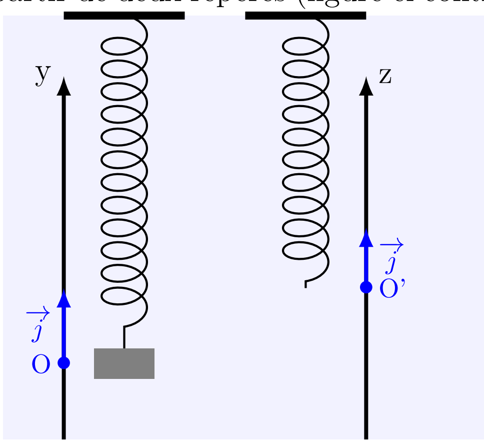
II. Étude énergétique

On fait le repérage de la position du solide à partir de deux repères (figure ci contre) :

* Le repère (1) : l'origine O' de l'axe se coïncide avec l'extrémité libre du ressort avant de lui suspendre le solide (S) et l'axe Oz vertical et orienté vers le haut .

On prend comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = 0$ au point O'

* Le repère (2) : L'origine O de l'axe se coïncide avec la position du centre d'inertie du solide (S) à l'équilibre et l'axe Oy vertical dirigé vers le haut .



repère 1 repère 2

On prend comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = 0$ au point O .
On prend comme état de référence de l'énergie potentielle élastique du ressort $E_{pe} = 0$ lorsque le ressort n'est pas déformé .

(a) On écarte (S) de sa position d'équilibre vers le bas d'une distance de d ; ($d < \Delta l_0$) et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$ choisi comme origine des dates ? le pendule effectue des oscillations verticales autour de sa position d'équilibre
Écrire l'expression de de l'énergie mécanique de l'oscillateur :
   i. Dans le repère de (1) en fonction z,m,K , g et v la vitesse du centre d'inertie G de (S) .
   ii. Dans le repère de (2) en fonction y,m,K , Δl_0 et v la vitesse du centre d'inertie G de (S) .
   iii. Dans quel repère l'énergie mécanique de l'oscillateur ne dépend pas de l'énergie potentielle de pesanteur ?

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre verticalement vers le bas d'une distance $d = 2cm$ et on le lance vers le haut avec un vitesse initiale $\vec{v}_0$; Le solide (S) effectue des oscillation verticales autour de sa position d'équilibre et d'amplitude $D = 7cm$
Sachant que l'énergie mécanique de l'oscillateur se conserve au cours du temps , déterminer l'expression de v_0 en fonction de g,Δl_0 , d et D . Calculer la valeur de v_0.